

UMA APLICAÇÃO DO GRÁFICO DE CONTROLE DE MÉDIA MÓVEL GERALMENTE PONDERADA NO PROCESSO DE PRODUÇÃO DE PAPEL

Custodio da Cunha Alves¹
Robert Wayne Samohyl²
Vicenzo Augusto Zago³
Elisa Henning⁴

RESUMO

Os gráficos de controle com memória são ferramentas apropriadas para detectar com maior eficácia pequenas alterações no monitoramento de processos, por contribuírem para uma utilização mais racional das informações disponíveis. Além dos já tradicionais gráficos com memória CUSUM e EWMA, o gráfico de média móvel geralmente ponderada (GWMA) tem se destacado como uma alternativa em processos cujo desvio é inferior a $0,5\sigma$. Este artigo apresenta um estudo da aplicação deste gráfico que inclui o desenvolvimento e a análise estatística de seu desempenho. Na realização deste estudo é utilizado um conjunto de dados reais de um processo de produção de papel em uma indústria catarinense, cuja característica de qualidade é a percentagem da umidade do papel monitorada a partir de observações individuais.

PALAVRAS-CHAVES: Gráfico GWMA; Monitoramento de Processos; Média e Variância.

AN APPLICATION OF THE GENERALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE CONTROL CHART FOR A PAPER PRODUCTION PROCESS

ABSTRACT

Control charts with memory are appropriate tools to detect more effective monitoring of small changes in processes, for contributing to more rational use of available information. Besides traditional CUSUM and EWMA charts memory, the generally weighted moving average (GWMA) chart has emerged, as an excellent alternative in cases with a standard deviation of the data is less than 0.5. This article presents a study of the implementation of this chart, by development and statistical analysis of their performance from the use of a dataset from one industry of the state of paper and packaging. In accomplishing this study, we used real data from a production process whose role in this industry quality characteristic is the percentage of moisture in the paper monitored from individual observations.

KEYWORDS: GWMA Chart; Monitoring Processes; Mean and Variance.

1 Doutor em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina. Universidade da Região de Joinville. **E-mail:** custodio.alves@univille.net

2 Doutor em Economia pela Rice University. Universidade Federal de Santa Catarina. **E-mail:** samohyl@yahoo.com

3 Mestre em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina. Imprimere Embalagens. **E-mail:** vicenzozago@yahoo.com.br

4 Doutor em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina. Universidade do Estado de Santa Catarina. **E-mail:** elisa.henning@udesc.br

UNA APLICACIÓN DE GRÁFICO DE CONTROL DE PROMEDIO MÓVIL GENERAL PONDERADO NO PROCESO DE FABRICACIÓN DE PAPEL

RESUMEN

Los gráficos de control de memoria son herramientas adecuadas para detectar con mayor eficacia los pequeños cambios en el monitoreo de procesos, por contribuir a un uso más racional de la información disponible. Además de los gráficos ya tradicionales con memoria CUSUM y EWMA, gráfico de control de promedio móvil general ponderado (GWMA) ha surgido como una alternativa en los casos que la desviación es inferior a $0,5\sigma$. Este artículo presenta un estudio de la aplicación de este gráfico que incluye el desarrollo y el análisis estadístico de su desempeño. En el presente estudio utilizado es un conjunto de datos reales a partir de un proceso de fabricación de papel en una industria de Santa Catarina, la característica de calidad es el porcentaje de humedad en el papel supervisado a partir de observaciones individuales

PALABRAS CLAVE: Gráfico GWMA; Monitoreo de procesos; Promedio y Varianza.

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de ambientes automatizados para medição e manipulação de dados tem proporcionado aos atuais processos industriais aferições com maior rapidez e precisão. Com isso, há a possibilidade de utilização prática de técnicas mais avançadas e complexas de monitoramento de processos, que visem principalmente à rápida detecção dos sinais de perda de controle no processo quando ocorrem alterações na média capaz de aumentar a garantia de robustez do processo e evitar ao máximo a produção de itens defeituosos.

O monitoramento efetivo das características da qualidade de um processo de produção depende frequentemente de ferramentas estatísticas para a detecção, identificação e análise das causas significantes responsáveis por variações que afetam o comportamento do processo de maneira imprevisível (Alves & Samohyl, 2004). Conforme estudos sobre controle estatístico de processos, as técnicas que envolvem monitoramento de processos foram desenvolvidas por Shewhart, a partir da década de 20. No entanto, ferramentas de controle estatístico tais como os gráficos de controle CUSUM (Soma Acumulada) e EWMA (Média Móvel Exponencialmente Ponderada), apesar de propostas ainda na década de 50, em função dos escassos recursos tecnológicos, somente nas últimas décadas tiveram sua aplicação propagada no ambiente industrial. Atualmente, diante da possibilidade de aplicação prática, vários pesquisadores têm despertado interesse na investigação e aperfeiçoamento destas ferramentas, bem como o desenvolvimento de outras, cada vez mais específicas e voltadas para o acompanhamento de processos.

Tomando como referência, em particular, os estudos desenvolvidos por Gan (1991), Crowder (1989) e Montgomery (2004) processos com dados cuja dispersão é maior que dois desvios padrão (2σ), os tradicionais gráficos de Shewhart apresentam melhor desempenho. No entanto, para processos cujos dados apresentam desvios padrão menores do que 2σ , a aplicação de gráficos de controle com memória tais como CUSUM ou EWMA é mais apropriada. Para conjuntos de dados com desvios muito pequenos, geralmente menores que $0,5\sigma$, Sheu e Hsieh (2009) afirmam que a extensão do gráfico de controle

EWMA, o GWMA, se constitui como uma alternativa de desempenho superior que os demais gráficos de controle com memória.

Nas últimas décadas vários autores desenvolveram estudos que envolvem a melhoria de desempenho dos gráficos EWMA através do monitoramento da média e da variabilidade dos dados. Tomando como referência métodos aplicados aos gráficos de controle para melhorar a detecção, Sweet (1986) recomenda a utilização de dois gráficos de controle EWMA, um para a média e outro para a variabilidade. Estes gráficos são aplicados por Reynold e Stoumbos (2001) para as observações individuais.

Sheu e Lin (2003) propõem o gráfico expandido chamado GWMA-*Generally Weighted Moving Average* (Média Móvel Geralmente Ponderada). Sheu e Hsieh (2009) propõem uma extensão do gráfico GWMA para o monitoramento da média e variabilidade. Este gráfico mostrou-se mais sensível do que o EWMA combinado quanto à detecção de pequenas variações na média e na variância. Em várias simulações realizadas, estes autores concluem que neste gráfico pequenas variações são detectadas com maior rapidez. Embora a forma bem estruturada com que estes autores apresentam a comparação entre estes dois métodos, a bibliografia não traz nenhum exemplo prático da aplicação destes gráficos, para que se possa verificar o seu desempenho e suas características funcionais.

Neste trabalho, propõe-se preencher esta lacuna, a partir de um exemplo numérico com a utilização de dados reais de um processo de produção de papel, com o objetivo de avaliar e comparar o desempenho entre os gráficos EWMA e GWMA quanto à sensibilidade, facilidade de operação, resultados demonstrados entre outras características. A escolha entre a utilização desses dois gráficos se justifica pelo fato de apresentarem maior sensibilidade para detectar alterações inferiores a 1σ para monitorar a característica da qualidade deste processo.

A partir da presente introdução este artigo está assim delineado: inicialmente é realizada uma breve revisão bibliográfica de gráficos de controle para o monitoramento da média e variância, incluindo os gráficos EWMA e GWMA. Em seguida são apresentados os resultados da aplicação proposta e discussão destes gráficos. Para finalizar estão as conclusões e considerações finais.

GRÁFICOS DE CONTROLE PARA O MONITORAMENTO DA MÉDIA E VARIÂNCIA

No controle estatístico de processos o principal objetivo é a eliminação da variabilidade e os gráficos de controle são ferramentas eficientes que permitem a redução sistemática dessa variabilidade nas características de qualidade do produto representadas pelas variáveis monitoradas via gráficos (Montgomery, 2004). Reynolds e Stoumbos (2001) mostram que a combinação dos gráficos EWMA é mais sensível que a combinação dos

gráficos de Shewhart para observações individuais (X e MR) para detectar pequenas mudanças na média e variância do processo.

Nas subseções seguintes são descritos os gráficos EWMA e GWMA. As notações a seguir atendem aos dois tipos de gráficos. Supõe-se x_t uma variável independente e identicamente distribuída obtida a partir da t -ésima amostra. Na verdade, x_t representa a característica de qualidade, os parâmetros μ e σ^2 correspondem a média e variância do processo, respectivamente. Se o processo está sob controle se representa o valor de μ por μ_0 e o valor de σ por σ_0 .

GRÁFICOS EWMA DA MÉDIA PARA OBSERVAÇÕES INDIVIDUAIS

O gráfico de controle da média móvel exponencialmente ponderada (EWMA- *Exponentially Weighted Moving Average*) tem sido amplamente aplicado na indústria como uma alternativa ao tradicional gráfico de Shewhart para detectar pequenos deslocamentos na média do processo (Montgomery, 2004). É usualmente utilizado em processos cujas características de qualidade monitoradas são observações individuais (Vargas, 2001). A estatística do gráfico EWMA para detectar alterações na média μ é definida como

$$Z_t = (1 - \lambda)Z_{t-1} + \lambda X_t \quad t=1,2,\dots, \quad (1)$$

onde λ é um parâmetro (peso) com $0 \leq \lambda \leq 1$, $\alpha > 0$, e o valor inicial é usualmente $Z_0 = \mu_0$. Se $\lambda = 1$ o gráfico EWMA se reduz ao gráfico de Shewhart \bar{X} . Para monitorar o processo, as médias Z_t são demarcadas no gráfico EWMA cujos limites de controle inferior e superior:

$$\mu_0 \pm L_z \sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}, \quad (2)$$

onde $\sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}$ é o desvio padrão assintótico de Z_t e um sinal é dado se Z_t permanecer fora da amplitude dos limites de controle. Este gráfico de controle EWMA para a média baseado em Z_t é representado por EWMA_Z (Samohyl, 2009).

GRÁFICOS DE CONTROLE GWMA DA MÉDIA PARA OBSERVAÇÕES INDIVIDUAIS

A estatística do gráfico GWMA para detectar alterações na média μ é definida como

$$Y_t = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha}) X_{t-i+1} + q^{t\alpha} \mu_0, \quad (3)$$

onde $0 \leq q \leq 1$, $\alpha > 0$, e o valor inicial é usualmente $Y_0 = \mu_0$ (Sheu & Lin, 2003). O parâmetro q é constante, e α pode ser utilizado para ajustar ligeiramente o coeficiente da função curtose.

Para $q = 1 - \lambda$, o peso que é fornecido para a última amostra no GWMA é o mesmo que no EWMA. Quando $q = 1 - \lambda$ e $\alpha = 1$ os gráficos GWMA e EWMA para a média apresentam a mesma função de ponderação. Quando $q = 0$, $\alpha = 1$ e a região dos limites de controle $L_y = 3,0$, então o gráfico GWMA se reduz ao gráfico de Shewhart X. A relação entre os parâmetros q , α e L_y destes três gráficos com memória é mostrada na Figura 1.

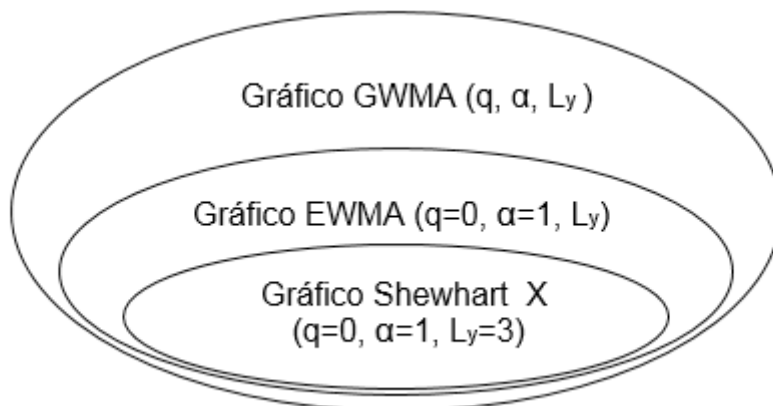


FIGURA 1 - Relação entre os gráficos X, EWMA e GWMA. Fonte: Adaptado de Sheu, S.-H, & Hsieh, Y.-T (2009). The extended GWMA Control Chart. *Journal of Applied Statistics*, 33(2), p. 135-147.

Ao se utilizar grandes valores de q e $0.5 \leq \alpha \leq 1$, o gráfico GWMA para a média, ficará mais eficaz do que o gráfico EWMA para detectar pequenas mudanças em μ (Sheu & Lin, 2003). Os limites de controle para os gráficos GWMA são

$$\mu_0 \pm L_y \sigma_0 \sqrt{W_L}, \tag{4}$$

onde $W_L = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha})^2 \right\}$, e $\sigma_0 \sqrt{W_L}$ é o desvio padrão assintótico de Y_T .

O processo é considerado fora de controle estatístico e algumas ações devem ser tomadas sempre que Y_T ficar fora da amplitude dos limites de controle. Este gráfico de controle é representado por $GWMA_Y$.

GRÁFICOS DE CONTROLE GWMA DA VARIÂNCIA PARA OBSERVAÇÕES INDIVIDUAIS

A estatística do gráfico GWMA é aplicada aos valores $(X_t - \mu_0)^2$, e é definida como:

$$S_t = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha}) (X_{t-i+1} - \mu_0)^2 + q^{t\alpha} \sigma_0^2 \quad t=1,2,\dots, \quad (5)$$

onde $0 \leq q \leq 1$, $\alpha > 0$, e o valor inicial é normalmente $S_0 = \sigma_0^2$.

O valor esperado de S_t pode ser calculado como:

$$E(S_t) = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha}) E(X_{t-i+1} - \mu_0)^2 + q^{t\alpha} \sigma_0^2 \quad (6)$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha}) \right\} E(X_t - \mu_0)^2 q^{t\alpha} \sigma_0^2 \quad (7)$$

$$= (1 - q^{t\alpha}) \alpha_0^2 + q^{t\alpha} \sigma_0^2 = \sigma_0^2 \quad ; \quad (8)$$

e sua variância é:

$$Var(S_t) = \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha}) Var(X_{t-i+1} - \mu_0)^2 \quad (9)$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha}) \right\} Var(X_t - \mu_0)^2 \quad (10)$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha}) \right\} 2\sigma_0^4 \quad (11)$$

Portanto, os limites de controle dos gráficos GWMA são:

$$\sigma_0^2 \pm L_s \sigma_0^2 \sqrt{2W_L} \quad (12)$$

onde $W_L = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^t (q^{(i-1)\alpha} - q^{i\alpha})^2 \right\}$, e $\sigma_0^2 \sqrt{2W_L}$ WL é o desvio padrão assintótico desvio padrão de S_t .

O processo é considerado fora de controle e de algumas medidas devem ser tomadas sempre que S_t ficar fora do intervalo dos limites de controle. Este gráfico GWMA da variância com base em S_t será representada como gráfico $GWMA_S$.

COMPARAÇÃO ENTRE GRÁFICOS EWMA E GWMA

De acordo com o exposto na introdução, Sheu e Lin (2003) propõem o gráfico expandido chamado GWMA, e uma extensão deste para o monitoramento da média e variabilidade foi desenvolvida por Sheu e Hsieh (2009). Estes autores apresentam ainda um estudo comparativo entre o desempenho dos gráficos EWMA e GWMA para a média e variância, com o objetivo de analisar o desempenho em termos de ARL (número médio de amostras até a emissão de um sinal) com diferentes parâmetros. Utilizam simulações para determinar, a partir de um ARL_0 (sob controle) aproximado de 370, os valores de ARL_δ (fora de controle) para diversas alterações de μ (média) e σ (desvios padrão), cujos resultados podem ser visualizados nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1 - Valores de ARL_0 e ARL_1 para gráficos EWMA ($\lambda=0,1$) e GWMA ($q=0,9$).

δ	Δ	EWMA _Z	EWMA _V	EWMA _Z EWMA _V	GWMA _V ($\alpha = 0,4$)	GWMA _V ($\alpha = 0,75$)	GWMA _S ($\alpha = 0,5$)	GWMA _S ($\alpha = 0,9$)	GWMA _V GWMA _S ($\alpha = 0,35$)	GWMA _V GWMA _S ($\alpha = 0,7$)
0,00	1,00	369,97	370,03	369,95	369,67	370,08	369,97	370,06	369,78	369,89
0,25	1,00	89,64	250,16	111,54	90,85	77,00	240,19	237,22	113,57	90,60
0,50	1,00	28,29	106,81	33,70	35,20	27,77	102,73	93,36	43,80	32,31
1,00	1,00	9,72	20,67	10,69	12,02	10,32	23,23	18,54	14,11	11,47
1,50	1,00	5,81	7,68	6,09	6,20	6,00	8,59	7,13	6,87	6,29
2,00	1,00	4,18	4,18	4,09	3,84	4,14	4,28	3,87	4,03	4,00
2,50	1,00	3,31	2,75	2,92	2,66	3,15	2,59	2,53	2,65	2,73
3,00	1,00	2,76	2,01	2,18	1,97	2,54	1,79	1,84	1,88	1,97
0,00	1,25	102,69	40,25	46,87	74,26	100,05	40,43	35,78	51,27	43,69
0,00	1,50	49,12	15,37	17,42	28,74	45,81	15,82	14,19	19,18	16,99
0,00	1,75	29,94	9,08	10,10	15,25	26,63	9,13	8,49	10,58	9,87
0,00	2,00	20,68	6,42	7,08	9,75	17,60	6,30	6,03	7,09	6,83
0,00	2,25	15,48	5,02	5,47	6,99	12,69	4,83	4,72	5,31	5,22
0,00	2,50	12,21	4,16	4,49	5,43	9,76	3,95	3,92	4,28	4,27
0,00	3,00	8,47	3,17	3,39	3,79	6,48	2,97	3,00	3,16	3,19
0,50	1,25	23,90	25,64	21,64	23,56	23,39	26,40	23,12	24,32	21,32
0,50	1,50	20,57	12,56	13,11	16,31	19,77	12,87	11,63	14,07	12,93
0,50	2,00	14,82	6,00	6,52	8,32	13,12	5,84	5,63	6,47	6,29
0,50	2,50	10,62	4,02	4,33	5,11	8,67	3,81	3,79	4,12	4,12
0,50	3,00	7,90	3,11	3,32	3,68	6,15	2,92	2,95	3,09	3,13
1,00	1,25	9,57	11,82	9,61	9,85	9,78	12,42	10,95	10,67	9,79
1,00	1,50	9,38	8,16	7,99	8,28	9,26	8,23	7,62	8,17	7,89
1,00	2,00	8,80	5,01	5,35	5,96	8,10	4,82	4,71	5,16	5,13
1,00	2,50	7,79	3,67	3,93	4,37	6,65	3,46	3,47	3,69	3,72
1,00	3,00	6,61	2,96	3,15	3,39	5,31	2,76	2,80	2,92	2,96
2,00	1,25	4,23	3,88	3,91	3,63	4,12	3,77	3,61	3,70	3,75
2,00	1,50	4,28	3,61	3,73	3,46	4,10	3,42	3,37	3,44	3,53
2,00	2,00	4,37	3,15	3,32	3,20	4,02	2,94	2,96	3,04	3,12
2,00	2,50	4,39	2,78	2,94	2,93	3,90	2,59	2,63	2,70	2,76
2,00	3,00	4,30	2,48	2,61	2,66	3,67	2,31	2,36	2,41	2,46
3,00	1,25	2,80	2,04	2,20	2,00	2,56	1,85	1,89	1,92	2,00
3,00	1,50	2,84	2,07	2,21	2,02	2,57	1,88	1,93	1,95	2,03
3,00	2,00	2,92	2,09	2,20	2,06	2,60	1,92	1,97	1,98	2,05
3,00	2,50	2,98	2,97	2,17	2,07	2,63	1,92	1,96	1,97	2,03
3,00	3,00	3,03	2,01	2,10	2,05	2,62	1,87	1,92	1,93	1,98
L_z		2,702	-	2,926	-	-	-	-	-	-
L_V		-	3,433	3,889	-	-	-	-	-	-
L_Y		-	-	-	2,932	2,753	-	-	3,088	2,988
L_S		-	-	-	-	-	4,446	3,225	5,577	4,233

Fonte: Adaptado de Sheu, S.-H, & Hsieh, Y.-T (2009). The extended GWMA Control Chart. *Journal of Applied Statistics*, 33(2), p. 135-147.

Nas tabelas 1 e 2, as linhas com Δ correspondem às alterações nos valores de μ enquanto as linhas com δ correspondem a alterações nos valores de σ . Os valores de α para cada método também variam. Diversas conclusões podem ser realizadas entre as combinações de métodos, Δ , δ , e α .

Tabela 2 - Valores de ARL_0 e ARL_1 para gráficos EWMA ($\lambda=0,2$) e GWMA ($q=0,8$).

δ	Δ	EWMA _Z	EWMA _V	EWMA _Z EWMA _V	GWMA _V ($\alpha = 0,3$)	GWMA _V ($\alpha = 0,65$)	GWMA _S ($\alpha = 0,4$)	GWMA _S ($\alpha = 0,8$)	GWMA _V GWMA _S ($\alpha = 0,25$)	GWMA _V GWMA _S ($\alpha = 0,6$)
0,00	1,00	370,44	369,88	369,89	370,55	369,67	370,00	370,00	369,67	369,98
0,25	1,00	121,33	262,85	150	122,79	97,47	257,61	254,13	154,71	116,47
0,50	1,00	36,28	122,27	45,3	46,49	32,11	121,40	111,99	59,97	38,27
1,00	1,00	9,79	24,55	11,02	14,27	10,43	28,14	22,38	17,31	11,83
1,50	1,00	5,23	8,12	5,56	6,74	5,61	9,84	7,83	7,73	6,08
2,00	1,00	3,59	4,09	3,63	3,89	3,69	4,66	3,99	4,25	3,78
2,50	1,00	2,78	2,6	2,62	2,57	2,70	2,71	2,50	2,68	2,60
3,00	1,00	2,31	1,88	1,99	1,85	2,11	1,83	1,78	1,87	1,90
0,00	1,25	84,52	45,62	50,77	65,16	79,49	46,79	41,60	54,67	48,78
0,00	1,50	36,79	16,47	18,25	24,24	32,76	17,51	15,43	20,01	18,13
0,00	1,75	21,28	9,25	10,11	12,77	18,05	9,75	8,85	10,83	10,13
0,00	2,00	14,34	6,36	6,89	8,26	11,74	6,61	6,14	7,17	6,90
0,00	2,25	10,62	4,9	5,24	6,02	8,45	4,99	4,74	5,34	5,22
0,00	2,50	8,38	4,02	4,28	4,73	6,51	4,05	3,90	4,28	4,24
0,00	3,00	5,82	3,05	3,22	3,38	4,47	3,01	2,96	3,15	3,16
0,50	1,25	24,56	28,71	23,21	25,27	22,93	30,16	26,37	27,40	22,40
0,50	1,50	18,39	13,17	13,22	15,48	16,99	14,04	12,49	14,72	13,25
0,50	2,00	11,33	5,91	6,3	7,27	9,62	6,11	5,70	6,53	6,31
0,50	2,50	7,59	3,89	4,13	4,50	6,05	3,91	3,77	4,11	4,08
0,50	3,00	5,55	2,99	3,16	3,30	4,32	2,96	2,90	3,08	3,09
1,00	1,25	9,08	12,57	9,37	10,50	9,23	13,81	11,89	11,76	9,69
1,00	1,50	8,48	8,26	7,62	8,22	8,26	8,81	7,94	8,52	7,75
1,00	2,00	7,31	4,89	5,08	5,47	6,53	5,00	4,73	5,19	5,06
1,00	2,50	6	3,54	3,73	3,93	4,99	3,53	3,43	3,68	3,67
1,00	3,00	4,86	2,84	2,99	3,07	3,91	2,80	2,75	2,90	2,92
2,00	1,25	3,64	3,75	3,52	3,58	3,61	3,97	3,62	3,79	3,57
2,00	1,50	3,67	3,46	3,4	3,36	3,53	3,54	3,34	3,48	3,38
2,00	2,00	3,7	3,02	3,09	3,03	3,39	2,99	2,91	3,03	3,03
2,00	2,50	3,63	2,67	2,77	2,75	3,19	2,62	2,58	2,68	2,70
2,00	3,00	3,45	2,39	2,48	2,47	2,93	2,33	2,32	2,39	2,42
3,00	1,25	2,34	1,92	2,01	1,89	2,13	1,88	1,84	1,90	1,93
3,00	1,50	2,38	1,96	2,04	1,92	2,15	1,91	1,88	1,93	1,96
3,00	2,00	2,44	1,99	2,06	1,96	2,19	1,94	1,93	1,96	1,99
3,00	2,50	2,49	1,98	2,05	1,97	2,22	1,93	1,92	1,96	1,99
3,00	3,00	2,51	1,94	2,01	1,94	2,21	1,88	1,88	1,91	1,94
L _Z		2,860	-	3,053	-	-	-	-	-	-
L _V		-	4,116	4,621	-	-	-	-	-	-
L _V		-	-	-	2,985	2,916	-	-	3,078	3,098
L _S		-	-	-	-	-	5,112	4,137	5,808	5,159

Fonte: Adaptado de Sheu, S.-H, & Hsieh, Y.-T (2009). The extended GWMA Control Chart. *Journal of Applied Statistics*, 33(2), p. 135-147.

Avaliando ambas as tabelas (1 e 2) observa-se que as combinações de GWMA oferecem os melhores desempenhos na detecção de aumentos em μ e/ou σ quando o parâmetro α estiver nos intervalos $0,35 < \alpha < 1,0$ e $0,25 < \alpha < 1,0$ (Tabela 3). A combinação de GWMA com $q=0,9$ apresenta o melhor valor de ARL_1 para α de aproximadamente 0,7, e a combinação com $q=0,8$ o melhor ARL_1 para α de aproximadamente 0,6.

Sheu & Tai (2006) apresentam um estudo comparativo entre gráficos de controle GWMA e EWMA para média. Para isso, ilustram através de um exemplo numérico o monitoramento de um processo cujas características da qualidade $X_j, j = 1,2,3,\dots$ são independentes e normalmente distribuídas com média $\mu = 0$, variância $\sigma^2 = 1$ e $n = 1$. O valor objetivo μ é zero, e o erro padrão aumenta 2σ em 20 amostras, cujos dados são mostrados na Tabela 3.

Tabela 3: Dados exemplo numérico gráficos de controle GWMA x EWMA.

j	x_j	z_j	EWMA-UCL	EWMA-LCL	y_j	GWMA-UCL	GWMA-LCL
0							
1	1,404	0,351	0,750	-0,750	0,140	0,298	-0,298
2	-1,934	-0,220	0,938	-0,938	-0,139	0,321	-0,321
3	-1,152	-0,453	1,028	-1,028	-0,150	0,332	-0,332
4	-1,764	-0,781	1,076	-1,076	-0,243	0,339	-0,339
5	0,440	-0,476	1,102	-1,102	-0,073	0,345	-0,345
6	2,517	0,272	1,116	-1,116	0,178	0,349	-0,349
7	-0,865	-0,012	1,124	-1,124	-0,053	0,352	-0,352
8	-0,650	-0,171	1,128	-1,128	-0,082	0,355	-0,355
9	-3,642	-1,039	1,131	-1,131	-0,405	0,357	-0,357
10	-0,913	-1,008	1,132	-1,132	-0,265	0,359	-0,359
11	0,750	-0,568	1,133	-1,133	-0,093	0,360	-0,360
12	-0,967	-0,668	1,133	-1,133	-0,205	0,362	-0,362
13	-0,111	-0,529	1,134	-1,134	-0,145	0,363	-0,363
14	1,081	-0,126	1,134	-1,134	-0,011	0,364	-0,364
15	4,919	1,135	1,134	-1,134	0,428	0,365	-0,365
16	-1,099	0,577	1,134	-1,134	0,014	0,366	-0,366
17	-2,912	-0,296	1,134	-1,134	-0,257	0,367	-0,367
18	-0,700	-0,397	1,134	-1,134	-0,159	0,368	-0,368
19	3,933	0,686	1,134	-1,134	0,299	0,369	-0,369
20	-1,344	0,178	1,134	-1,134	-0,061	0,369	-0,369

Fonte: Adaptado de Sheu, S.-H, & Tai, S.-H (2006). Generally Weighted Moving Average control chart for monitoring process variability. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 30(5-6), 452-458.

Para este estudo comparativo, ao se utilizar ARL_0 de 500 para ambos os gráficos EWMA e GWMA, os parâmetros sugeridos para o gráfico EWMA são $\lambda = 0,25$ e $L = 3$, o que resultaria em limites de controle aproximados de $\pm 1,133$. Para o gráfico GWMA os parâmetros são ajustados para $q = 0,9$, $\alpha = 0,5$ e $L = 2,998$, com os limites de controle estando aproximadamente em $\pm 0,369$. Os gráficos resultantes estão na Figura 2.

Como se pode observar, tanto pela Tabela 3 quanto pela Figura 2, o gráfico de controle EWMA sinaliza um ponto fora dos limites de controle estatístico na 15ª amostra, enquanto que o gráfico de controle GWMA é capaz de sinalizar a alteração já na 9ª amostra. Assim, percebe-se para os dados do exemplo numérico que neste processo o gráfico GWMA é capaz de detectar alterações no processo mais rapidamente que o gráfico EWMA.

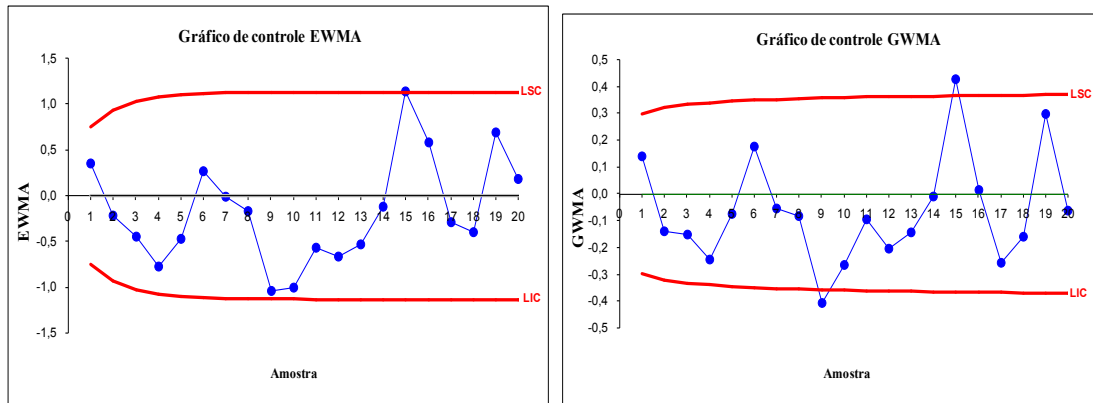


Figura 2 - Comparativo entre gráficos de controle EWMA x GWMA. Fonte: Adaptado de Sheu, S.-H, & Tai, S.-H (2006). Generally Weighted Moving Average control chart for monitoring process variability. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 30(5-6), 452-458.

A APLICAÇÃO DO GRÁFICO DE CONTROLE GWMA

Com o objetivo de aprimorar os fundamentos sobre gráfico de controle GWMA até aqui apresentados para ilustrar a sistemática de desenvolvimento deste gráfico e comprovar a validade prática da metodologia proposta por Sheu e Hsieh (2009), são utilizados neste trabalho dados reais de um processo de produção de papel cuja característica de qualidade é a percentagem da umidade do papel monitorada através observações individuais.

A umidade é a quantidade de água presente no papel, mensurada nesta indústria em percentual cujo valor nominal é $8 \pm 0,5\%$. Por ser um material higroscópico, o papel absorve ou perde umidade conforme o ambiente em que se encontra. A umidade tem grande influência nas operações de fábrica nas quais o papel é submetido durante a produção de produtos onde ele é a matéria-prima, e também nas características do produto final. Esta característica da qualidade é importante uma vez que as propriedades das embalagens de papelão tais como gramatura, peso, coluna, entre outros, sofrem grande influência da umidade presente no papel.

Neste artigo, para o desenvolvimento do gráfico de controle GWMA optou-se pela metodologia proposta por Sheu e Hsieh (2009). Para tal, desenvolveu-se uma planilha eletrônica em ambiente MS-Excel cujas fórmulas inseridas nas células desta planilha geram dados para a análise estatística antecipada do processo bem como a utilização dos mesmos para a construção dos gráficos de controle GWMA para média e variância, conforme Figura 3.

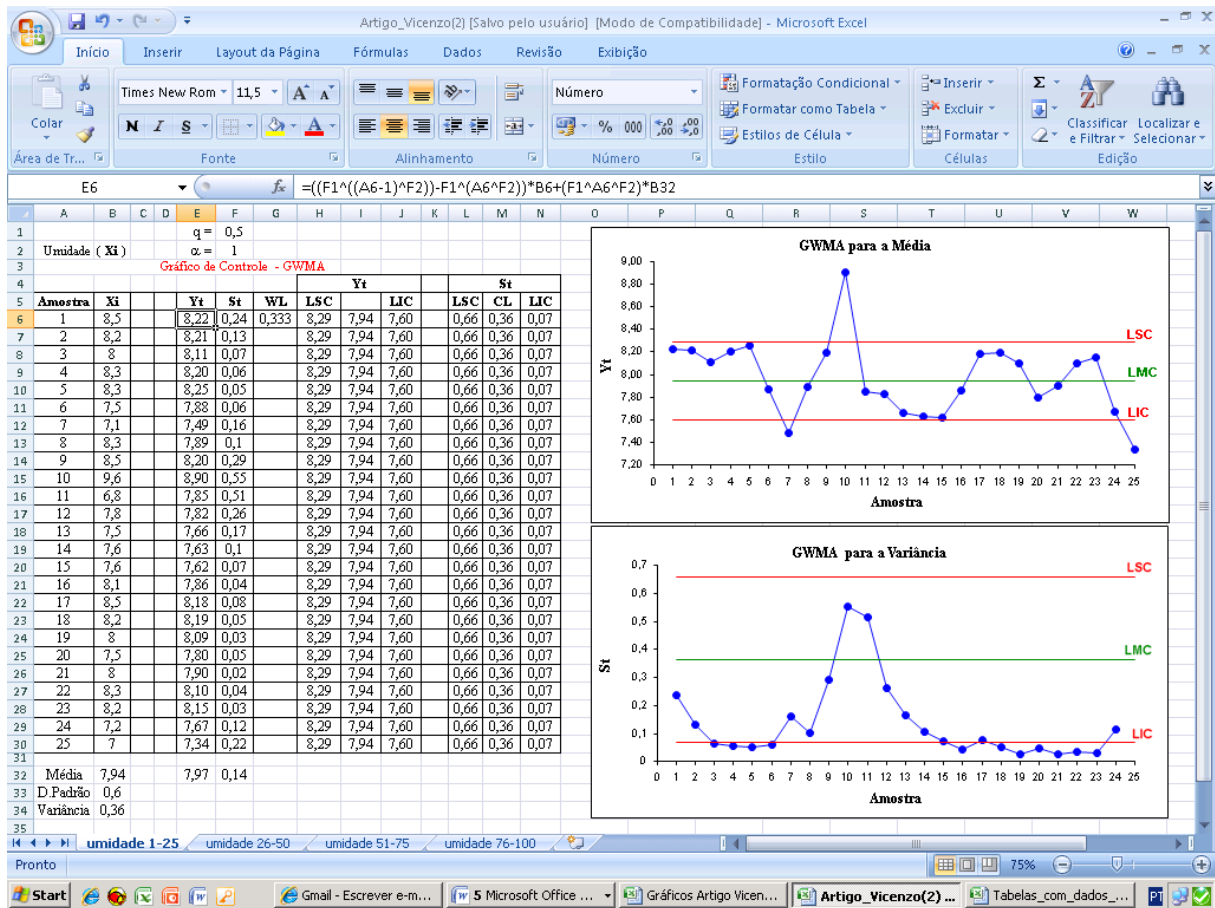


Figura 3 - Planilha eletrônica dos dados gerados a partir das informações do processo. Fonte: Elaborado pelos autores.

Foram verificadas as suposições de normalidade e autocorrelação, necessárias para a aplicação dos gráficos. A ausência de autocorrelação foi confirmada por meio da construção de correlogramas (Figura 4).

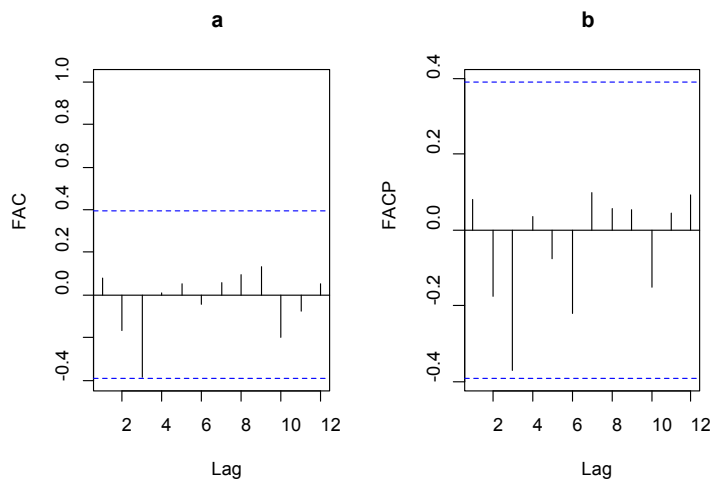


Figura 4 - Gráficos da função de autocorrelação (a) e autocorrelação parcial (b) para os dados da unidade do papel. Fonte: Elaborado pelos autores.

Os dados também seguem uma distribuição normal, de acordo com o gráfico da Figura 5. A verificação da normalidade e autocorrelação dos dados monitorados neste processo, foi realizada com auxílio do *software* R (R Core Team, 2014).

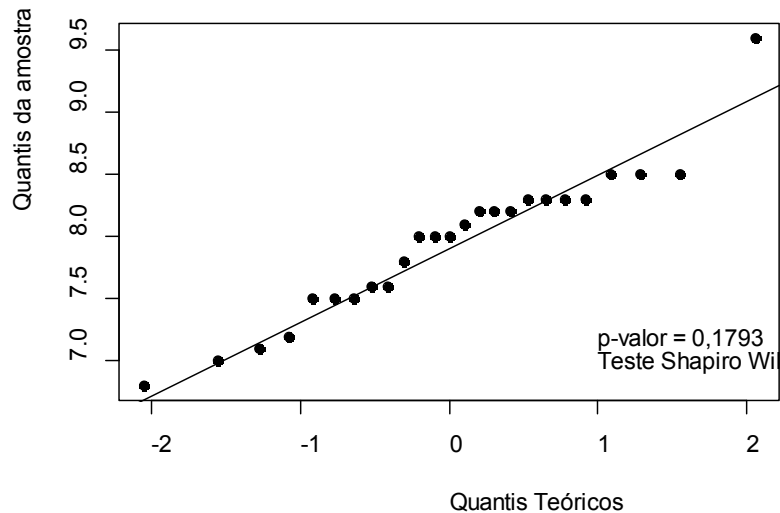


Figura 5 - Gráfico de Probabilidade Normal e Teste Shapiro-Wilk para os dados da umidade do papel. Fonte: Elaborado pelos autores.

O gráfico GWMA desenvolvido a partir da planilha eletrônica (Figura 3) para a média dos dados deste processo e o gráfico EWMA também para a média desses dados são ilustrados conforme Figura 6.

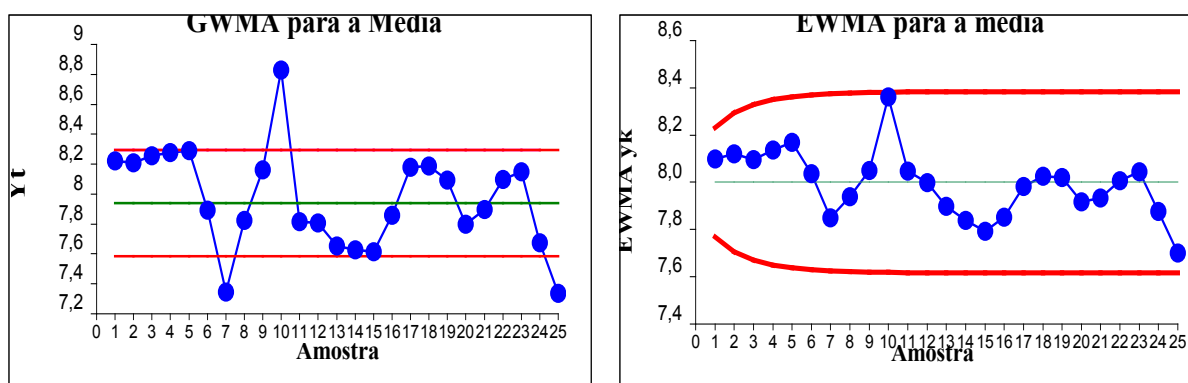


Figura 6 - Gráficos GWMA e EWMA da média para os dados da umidade do papel. Fonte: Elaborado pelos autores

Como se pode observar, o gráfico GWMA da média assinala o primeiro ponto fora dos limites de controle na 7ª amostra, enquanto o gráfico EWMA somente na 9ª amostra assinala um deslocamento no nível médio do processo e nenhum ponto ultrapassa os limites de controle.

O gráfico GWMA desenvolvido a partir da planilha eletrônica (figura 3) para a variância dos dados deste processo e o gráfico EWMA também da variância desses dados podem ser visualizados na Figura 7.

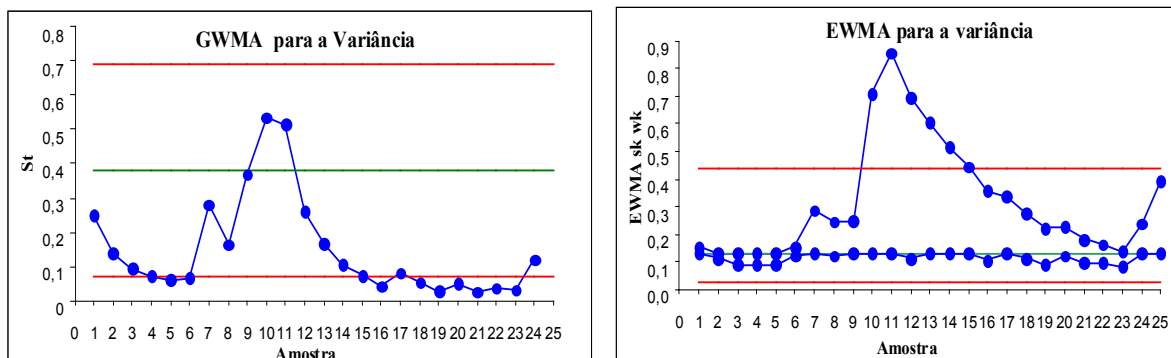


Figura 7 - Gráficos GWMA e EWMA da variância para os dados da umidade do papel. Fonte: Elaborado pelos autores

Como se pode observar, o gráfico GWMA da variância assinala seu primeiro ponto fora dos limites de controle estatístico na 5ª amostra enquanto que no gráfico EWMA isto ocorre somente na 10ª amostra.

Tomando como referência, em particular, os estudos desenvolvidos por Sheu e Hsieh (2009) e na aplicação da metodologia proposta por estes autores apresentada neste artigo, conclui-se que, em processos cujo desvio padrão dos dados é inferior a $0,5\sigma$ a utilização do gráfico GWMA para monitorar a média e a variância como uma alternativa viável em relação ao gráfico EWMA. Os resultados obtidos a partir da aplicação realizada comprovam esta premissa, conforme pode ser visualizado nas Figuras 6 e 7.

A utilização destes gráficos de controle para monitorar características da qualidade de um processo com pequenas variações, de acordo com Alves (2003) apresenta vantagens, considerando-se aspectos estatísticos e econômicos. Sob o ponto de vista estatístico, pode haver uma redução no número médio de amostras até que o gráfico sinalize a ocorrência de uma causa especial. Sob o ponto de vista econômico, pode haver uma redução nos custos relacionados ao controle do processo, causada pela redução na taxa de amostragem quando o gráfico estiver indicando um processo sob controle. Apesar de seu impacto econômico no monitoramento de processos, sua utilização prática no Brasil infelizmente ainda é pequena. Tal impacto econômico deve-se não somente à redução nos custos de amostragem, mas também a redução nas perdas ocasionadas pela não conformidade dos itens manufaturados. A redução destas perdas, obtidas através da sinalização mais rápida de processos fora de controle, pode ser bastante significativa, principalmente em processos onde pequenos desvios da meta estabelecida para a característica da qualidade que impliquem em grandes prejuízos materiais.

Ressalta-se que o gráfico GWMA não substitui aos gráficos EWMA, tanto para a média e variância, uma vez que ambas as ferramentas da qualidade são utilizadas para detectar

pequenos desvios. Entretanto, a adoção de gráficos GWMA ou de EWMA depende da amplitude da mudança que se pretende detectar.

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo apresentou um estudo da aplicação de um gráfico GWMA, por meio do desenvolvimento e análise de seu desempenho. Na realização deste estudo foram utilizados dados reais de uma indústria catarinense de papel e embalagem. A característica de qualidade analisada foi a percentagem da umidade do papel monitorada a partir de observações individuais. A análise estatística dos dados reais do processo produção da indústria catarinense de papel e embalagem cuja característica da qualidade monitorada é a percentagem da umidade do papel revelou uma maior sensibilidade do gráfico GWMA em comparação ao gráfico EWMA tanto para a média quanto para a variância.

É importante salientar ainda que a implementação de qualquer gráfico de controle depende das especificidades de cada processo. Para tal, deve-se observar que é essencial selecionar adequadamente os seus parâmetros, uma vez que a eficiência destes gráficos depende em parte desta escolha.

REFERÊNCIAS

Alves, C.C. (2003) - *Gráficos de controle CUSUM: um enfoque dinâmico para a análise estatística de processos*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil.

Alves, C.C. & Samohyl, R.W. *A utilização dos gráficos de controle CUSUM para o monitoramento de processos industriais* ENEGEP 2004 - XXIV Encontro Nacional de Engenharia de Produção, Florianópolis, SC, Brasil.

Crowder, S.V (1989). Design of Exponentially Weighted Moving Averages Schemes. *Journal of Quality Technology*, 21, 155-162.

Gan, F.F (1991). An Optimal Design of CUSUM Quality Control Charts. *Journal of Quality Technology*, 23, 279-286.

Montgomery, D.C. *Introduction to statistical quality control*. 4rd Edition, New York: John Wiley, 2004.

R Core Team (2014). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2014. Disponível em: <http://www.R-project.org>.

Reynolds, M.R. & Stoumbos, Z.G (2001). Monitoring the process mean and variance using individual observation and variable sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 33(2), 181-205.

Samohyl, R.W (2009). *Controle Estatístico de Qualidade*. Rio de Janeiro: Elsevier.

Sheu, S.-H, & Lin, T.C (2003). The Generally weighted moving average control chart for detecting small shifts in the process mean. *Quality Engineering*, 16(2), 209-231.

Sheu, S.-H, & Tai, S.-H (2006). Generally Weighted Moving Average control chart for monitoring process variability. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 30(5-6), 452-458.

Sheu, S.-H, & Hsieh, Y.-T (2009). The extended GWMA Control Chart. *Journal of Applied Statistics*, 33(2), p. 135-147.

Sweet, A.I (1986). Control charts using coupled exponential weighted moving average. *IIE Transactions*, 18, p. 26-33.

Vargas, V. C. C (2001). *Estudo Comparativo do desempenho das cartas de controle CUSUM e EWMA*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção, UFSM, Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil.

Recebido em: 17/01/2015

Aceito para publicação em: 16/07/2015