

# DETECÇÃO DO COMPRIMENTO DO PERÍODO ADEQUADO DE AQUECIMENTO EM MODELOS DE SIMULAÇÃO A TEMPO DISCRETO

Anderson Ribeiro Duarte<sup>1</sup>

Hélida Mara Gomes Norato<sup>2</sup>

Víctor Ferreira Silva<sup>3</sup>

Fernando Luiz Pereira Oliveira<sup>4</sup>

## RESUMO:

Este artigo tem o objetivo de comparar dois procedimentos utilizados para detecção do comprimento adequado de períodos de aquecimento (*warm-up*) em modelos de simulação para sistemas de filas. Os modelos de simulação para sistemas de filas visam reproduzir fluxos para sistemas de fila. Entretanto, ao obter estimativas para determinados parâmetros de interesse, associados a estes sistemas, é possível que tais estimativas sejam comprometidas pela presença de algum viés associado à falta de estacionariedade na série temporal obtida ao longo do procedimento de simulação. Existem diversas técnicas para avaliação do período adequado de *warm-up* em sistemas de filas presentes na literatura, algumas destas técnicas são baseadas em procedimentos estatísticos. Neste trabalho estamos interessados em utilizar dois métodos de detecção de períodos de aquecimento, visando uma comparação e análise de qualidade de resultados obtidos.

**PALAVRAS-CHAVE:** Períodos de aquecimento; Modelos de Simulação; Sistemas de filas; Cruzamento Iterado das Médias; Controle Estatístico de Processo.

## INTRODUÇÃO

Procedimentos de simulação utilizam de técnicas computacionais e estatísticas para viabilizar a construção de modelos capazes de reproduzir em ambientes computacionais um sistema real. Um dos propósitos centrais é viabilizar análises e testes de diversas alternativas em modelos que podem ser aplicadas aos sistemas existentes. Há inúmeras aplicações dos modelos de simulação, muitas delas relacionadas a sistemas de filas, como por exemplo: dimensionamento de linhas e células de produção, dentre outros.

---

1 Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Professor Adjunto do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto com interesse nas áreas de Processos Estocásticos e Simulações Estocásticas.

**E-mail:** [duarte.andersonr@gmail.com](mailto:duarte.andersonr@gmail.com)

2 UFOP/DEENP. Professora Assistente do Departamento de Engenharia de Produção da Universidade Federal de Ouro Preto (campus João Monlevade) com interesse nas áreas de Simulações Estocásticas e Logística.

**E-mail:** [helidanorato@gmail.com](mailto:helidanorato@gmail.com)

3 UFOP. Graduando em Estatística pela Universidade Federal de Ouro Preto com interesse nas áreas de Processos Estocásticos e Simulações Estocásticas. **E-mail:** [victor.est.ufop@gmail.com](mailto:victor.est.ufop@gmail.com)

4 UFOP/DEEST. Professor Adjunto do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto com interesse nas áreas de Controle Estatístico de Processos. **E-mail:** [fernandoluiz@iceb.ufop.br](mailto:fernandoluiz@iceb.ufop.br)

Estudos utilizando simulação exigem grande esforço computacional e também para a construção e programação dos modelos. Por outro lado, o esforço dedicado para a avaliação de dados de saída da simulação visando promover uma análise adequada dos resultados é ainda um tanto limitado. Uma rodada de simulação de sistemas que funcionam intermitentemente é composta de um tempo de aquecimento necessário à estabilização do sistema, seguido de diversas replicações, cada uma delas, fornecendo dados para a realização de estatísticas referentes ao comportamento do modelo simulado. Em alguns procedimentos é comum observar simulações simplistas, em que o tempo de aquecimento e o número de replicações são escolhidos de forma completamente arbitrária como é discutido em Norato e Duarte (2011).

Considerando que estes modelos de simulação são conduzidos ao longo do tempo e através de amostras aleatórias de distribuições de probabilidade, pode-se observar que as estimativas são realizações particulares de variáveis aleatórias que podem ter muita variabilidade. Avaliando várias replicações distintas é possível observar diferentes características entre elas. Desta forma, alguma, ou algumas delas não devem estar representando fielmente a realidade que se tenta reproduzir através do modelo proposto. Pode existir então uma probabilidade significativa de fazer inferências errôneas sobre o sistema em estudo. Um impedimento para a obtenção de estimativas precisas dos parâmetros de um sistema modelado através de simulação é o tempo computacional necessário para que o sistema simulado se estabilize. Com o intuito de obter melhorias nos procedimentos de coleta de dados de simulações é de extrema importância a adoção de métodos para seleção do período de aquecimento (*warm-up*). Por período de aquecimento denomina-se a detecção do período transiente inicial em que os dados da simulação apresentam elevada variabilidade quando comparados aos dados do período permanente.

Denomina-se esse período permanente por estado estacionário. Neste período os dados são capazes de produzir estimativas mais estáveis para os parâmetros de interesse. Dado um conjunto realizações para um parâmetro de interesse  $Y_1, Y_2, \dots$ . Seja  $F_i(y|I_n) = P(Y_i \leq y | I_n)$  para  $i=1, 2, \dots$ , em que  $y$  é um número real e  $I_n$  representa as condições iniciais usuais para iniciar a simulação no tempo 0 (A probabilidade condicional  $P(Y_i \leq y | I_n)$  é a probabilidade de ocorrer o evento  $[Y_i \leq y]$  dadas as condições iniciais  $I_n$ ). Para um sistema em estudo,  $I_n$  deve especificar o número de componentes presentes, e se o servidor está ocupado ou não no tempo 0. Denotamos  $F_i(y|I_n)$  por distribuição transiente do processo no tempo discreto  $i$  para condições iniciais  $I_n$ . Note que  $F_i(y|I_n)$  deverá ser diferente para cada valor  $i$  e para cada conjunto de condições iniciais  $I_n$ . Para  $y$  e  $I_n$  fixos, as probabilidades  $F_1(y|I_n), F_2(y|I_n), \dots$  formam um sequência numérica. Se  $F_i(y|I_n) \rightarrow F(y)$  quando  $i \rightarrow \infty$  para todo  $y$  e para alguma condição inicial  $I_n$ , então  $F(y)$  é chamada de distribuição estacionária para o processo estocástico  $Y_1, Y_2, \dots$ . Estritamente, a distribuição estacionária  $F(y)$  é somente obtida no limite quando  $i \rightarrow \infty$ . Na prática, porém, muitas vezes existe um índice de tempo finito  $L$  tal que as distribuições a partir deste ponto sejam aproximadamente iguais, ou seja, "estado estacionário". É importante salientar que o estado estacionário não implica que as variáveis aleatórias da série temporal assumirão sempre os mesmos valores, mas

sim, significa que estas variáveis aleatórias têm aproximadamente a mesma distribuição de probabilidades.

Particularmente neste trabalho estaremos abordando modelos de simulação para filas que são do tipo M/M/1 que é um modelo mais simples e filas M/G/1 que formam modelos um pouco mais sofisticados.

Este trabalho tem por objetivo discutir duas técnicas já existentes para a detecção de períodos de aquecimento; construir um modelo experimental de simulação para comparar técnicas e por fim comparar as duas abordagens metodológicas para detecção de períodos de aquecimento em modelos de simulação. A seção 2 apresenta uma revisão bibliográfica acerca do assunto em estudo e discute alguns aspectos preliminares sobre a teoria de filas; a seção 3 descreve os métodos para detecção de períodos de aquecimento que serão utilizados neste estudo e apresenta os modelos experimentais que serão utilizados; a seção 4 mostra avaliações numéricas comparativas entre os métodos incluindo discussões sobre os resultados de aplicação de cada um dos métodos. Conclusões e discussões finais são apresentadas na seção 5.

## REVISÃO DE LITERATURA

Pode-se encontrar na literatura associada à área de simulação uma extensa gama de métodos para a detecção do período de aquecimento como pode ser visto em Robinson (2002). Fato este que destaca a relevância do estudo adequado do período transiente, para que este período não influencie as estimativas dos parâmetros de interesse no procedimento de simulação, quando este atingir o seu estado estacionário. Segundo Nelson (1992), os métodos possuem características que podem ser adequadas a diversos tipos de modelos de simulação. Em geral, duas abordagens são utilizadas: a exclusão de dados e inicialização inteligente. Na primeira abordagem, o modelo é executado por um período de aquecimento até atingir um estado estacionário e, antes do qual, os dados são eliminados. A maior dificuldade presente na utilização desta abordagem está em escolher a duração do período de aquecimento. Na segunda abordagem, o modelo é colocado em uma condição “realista” no início da execução. Aqui, o estudo estará concentrado na primeira abordagem, ou seja, com o objetivo de determinar um período adequado de aquecimento para os modelos de simulação. De acordo com Robinson (2002), os métodos para detecção do período de aquecimento podem ser classificados em cinco grupos:

1. Gráficos como pode ser visto nos exemplos em Welch (1993), Robinson (1994), Banks, Carson and Nelson (1996) e Norato e Duarte (2011);
2. Heurísticos que podem ser ilustrados em Fishman (1973), Gafarian, Ancker and Morisaku (1978), Pawlikovski (1990) e White (1997)
3. Estatísticos como os exemplos em Kelton and Law (1983), Yücesan (1993) e Robinson (2002);

4. Testes de vício de inicialização mostrados em Schruben (1982), Vassilacopoulos (1989), Nelson (1992) e Goldsman, Schruben and Swain (1994);
5. Híbridos como os trabalhos em Pawlikovski (1990) e Jackway and Desilva (1992).

Após a escolha de uma abordagem para determinação do período de aquecimento, modelos experimentais precisam ser construídos visando obter estratégias de teste destes métodos. Para a construção de um modelo experimental de simulação, serão abordados alguns conceitos básicos da teoria de filas. O objetivo é familiarizar o leitor com o assunto e facilitar o entendimento dos parâmetros avaliados. Diversos problemas do cotidiano são modelos clássicos de sistemas de filas, o que, por si só, é motivo para se buscar uma maior compreensão de tais modelos. Dado o interesse de entendimento, buscam-se ao longo do tempo, técnicas de reprodução do funcionamento desses modelos, em geral, através de estratégias de simulação computacional.

Os modelos de simulação computacional para sistemas de filas já se encontram bastante difundidos e, também, bem evoluídos do ponto de vista de sua implementação. Por outro lado, por mais que as técnicas de simulação já estejam em um satisfatório patamar de desenvolvimento, a análise dos resultados ainda não é feita a contento em muitos casos, isto se deve a um conjunto de escolhas de parâmetros do modelo de simulação e também discussões acerca da quantidade necessária de replicações. Para discutir este assunto será necessário descrever inicialmente alguns modelos clássicos de sistemas de filas. Para tanto, será utilizada a clássica notação de Kendall (1953).

A notação de Kendall (1953) prima por explicitar: estrutura da distribuição das chegadas ao sistema; estrutura da distribuição dos atendimentos; quantidade de servidores de atendimento; capacidade da fila; tamanho da população e a disciplina da fila. Quando são omitidos os parâmetros associados à capacidade da fila, ao tamanho populacional e a disciplina, entende-se que não existe uma limitação de capacidade na fila, não existe uma limitação de tamanho para a população e que a disciplina da fila seja (FIFO - *First in, first out*), ou seja, a primeira entidade a entrar no sistema será a primeira entidade atendida. Alguns exemplos de filas que podem compor o sistema são apresentados a seguir:

- M/M/1 - Fila em que as chegadas e os atendimentos são Markovianos, ou seja, os tempos entre chegadas e os tempos de atendimento seguem distribuição exponencial de parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$  respectivamente, existe um único servidor para o atendimento, e a fila de espera para este servidor sem limitação de capacidade;
- M/M/c - Processos de chegada e atendimento Markovianos, com  $c$  servidores, e a fila de espera sem limitação de capacidade;
- M/M/c/k - Processos de chegada e atendimento Markovianos, com  $c$  servidores e a fila de espera para o atendimento com limitação de capacidade  $k$ ;
- M/G/c - Fila em que as chegadas são Markovianos e o atendimento é genérico, ou seja, o tempo entre chegadas segue uma distribuição exponencial de parâmetro  $\lambda$  e o tempo de atendimento segue qualquer distribuição, existem  $c$  servidores

para o atendimento e a fila de espera para o atendimento não tem limitação de capacidade;

- M/G/c/k - Fila em que as chegadas são Markovianos e o atendimento é genérico, ou seja, o tempo entre chegadas segue uma distribuição exponencial de parâmetro  $\lambda$  e o tempo de atendimento segue qualquer distribuição, existem  $c$  servidores para o atendimento e a fila de espera para o atendimento tem capacidade  $k$ , ou seja,  $k$  lugares de espera para o atendimento.

Dada uma fila do sistema, existem diversos parâmetros e variáveis de interesse a serem discutidos. O interesse maior está em obter um procedimento adequado de estimação de variáveis ou medidas de desempenho do sistema. Elencando alguns destes parâmetros e algumas medidas de desempenho de interesse, têm-se:

- $\lambda_i$  (parâmetro): taxa de chegada no  $i$ -ésimo servidor de atendimento;
- $\mu_i$  (parâmetro): taxa de atendimento no  $i$ -ésimo servidor de atendimento;
- $r_i = \lambda_i / \mu_i$  (medida de desempenho): intensidade do tráfego no  $i$ -ésimo servidor de atendimento (taxa de utilização do servidor);
- $k_i$  (parâmetro): capacidade total do  $i$ -ésimo servidor de atendimento, isto é, capacidade da área de circulação (buffers) incluindo as unidades que estão sendo atualmente atendidas;
- $N_f$  (medida de desempenho): tamanho médio da fila;
- $q_f$  (medida de desempenho): tempo médio de espera na fila;
- $N$  (medida de desempenho): quantidade média de clientes no sistema;
- $\theta$  (medida de desempenho): tempo médio de permanência dos clientes no sistema.

Exemplos de construção e utilização destes modelos podem ser obtidos em Cruz, Duarte and Van Woesel (2008). É importante notar que em uma simulação, o problema é resolvido numericamente, ou seja, as estimativas obtidas para as medidas de desempenho são provenientes de realizações de variáveis aleatórias. Portanto, o número de realizações e a variabilidade inerente a estas variáveis aleatórias influenciam bastante o processo de estimação. É necessário considerar que o sistema necessita de um tempo inicial de estabilização (tempo de aquecimento) para que possa produzir resultados confiáveis.

Após a construção do modelo experimental, serão abordadas duas técnicas distintas para a estimação do adequado período de aquecimento a ser adotado. Serão utilizados o método SPC proposto por Robinson, 2002 e o método do Cruzamento das Médias Iterado proposto por Norato e Duarte, 2011. Estes métodos serão mais bem discutidos na seção posterior.

## MÉTODOS E PROCEDIMENTOS

Nesta seção serão discutidos os métodos de estimação do período de aquecimento em modelos de simulação e também a construção do modelo experimental de simulação para a execução dos testes. Inicialmente daremos uma breve descrição dos dois métodos a serem abordados.

### MÉTODO *STATISTICAL PROCESS CONTROL*

O método *Statistical Process Control* - SPC proposto em Robinson (2002) é uma técnica gráfica, que necessita de múltiplas replicações, podendo ser descrito em quatro etapas:

1. Execute  $n$  replicações do procedimento de simulação, cada uma destas replicações terá tamanho  $m$ . Seja  $Y_{ji}$  a  $i$ -ésima observação da variável de interesse na  $j$ -ésima replicação, neste caso  $i=1,2,\dots,m$  e  $j=1,2,\dots,n$ ;
2. Calcule as médias de cada uma das observações entre as replicações, estas médias serão denotadas por  $\bar{Y}_i$ , em que:  $\bar{Y}_i = \sum_{j=1}^n \frac{Y_{ji}}{n}$  para  $i=1, 2,\dots$ ,
3. Agora as médias são agrupadas em  $b$  grupos de tamanho  $k$ , e são representadas as médias por grupo como  $\bar{Y}_x$  para  $x=1,2,\dots,b$ . O tamanho destes grupos é selecionado de forma a garantir que as médias por grupo sejam aceitas no teste de aderência para normalidade de *Anderson-Darling* e no teste de correlação de *Von Neuman*. Recomenda-se inclusive um mínimo de 20 grupos. Após a divisão em grupos, denota-se a série temporal resultante por:

$$Y_{(k)} = \{\bar{Y}_1(k), \bar{Y}_2(k), \dots, \bar{Y}_b(k)\} \quad (2)$$

4. Será gerada então uma carta de controle para estas séries temporais. Considera-se as estimativas de média populacional  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$  obtidas da última metade da série  $Y_{(k)}$ . De posse destas estimativas os limites de controle LC são obtidos. A peculiaridade do método fica por conta do modo que ele estima o desvio padrão para gerar os limites de controle, dado pela equação  $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=b-\frac{b}{2}+1}^b s_i^2}{b-\frac{b}{2}+1}}$  com  $s_i$  sendo o desvio padrão do  $i$ -ésimo vetor de médias.

O método SPC trata as duas causas possíveis de variabilidade existentes no processo, as causas *especiais* e *naturais* de um processo. Os pontos fora de controle serão ditos aqueles que estiverem em transiência sob as devidas determinações propostas por Bissell (1994):

- 2 valores consecutivos violando os limites;
- valores seguidos próximos aos limites;
- 7 ou mais valores apenas de um lado da media em seguida;
- Zig-zags excessivos com poucos pontos perto da media;

O período de *warm-up* só pode ser definido partir do local no qual a série estiver em controle. Nesse estudo serão definidos pontos fora de controle aqueles que estão sendo afetados por causas especiais. Estas causas especiais são as já definidas pelo proce-

dimento de montagem da carta  $\bar{X}$  utilizando a maneira proposta para estimação dos limites de controle descrita anteriormente.

Entende-se que o processo atingiu o equilíbrio quando está em controle.

## MÉTODO CRUZAMENTO DAS MÉDIAS ITERADO

Já o método do Cruzamento das Médias Iterado proposto em Norato e Duarte (2011) avalia os cruzamentos ocorridos em um passo em relação a média. Este procedimento é feito de uma forma iterada. Para tanto, considere  $n$  replicações do procedimento de simulação, cada uma delas de tamanho  $m$ . Defina as médias das observações entre replicações por  $\bar{Y}_i$  com  $i=1,2,\dots,m$ . Denote por  $\bar{Y}_j$  a média das últimas  $m - (j - 1)$  médias entre replicações, neste caso. É fácil ver que para os valores  $\bar{Y}_i$  com  $i=1,2,\dots,m$ , algumas das observações iniciais são pertencentes ao período transiente. Em geral, todas essas observações iniciais são menores ou então, são todas maiores que  $\bar{Y}_1$ . O objetivo é descartar estas observações de uma forma iterada como veremos a seguir através dos seguintes passos:

1. Execute  $n$  replicações da simulação considerando um tamanho pré-estabelecido  $m$  para as replicações e obtenha os valores para  $i=1,2,\dots,m$  e o valor  $\bar{Y}_1$ ;
2. Verifique se  $\bar{Y}_1$  é inferior ou superior à  $\bar{Y}_1$ . Se inferior, determine o menor  $k$  tal que seja superior a e descarte as primeiras observações, o procedimento é análogo para  $\bar{Y}_1$  superior a  $\bar{Y}_1$ ;
3. Considere agora a média das médias  $\bar{Y}_k$  e a nova série  $\bar{Y}_i$  para os valores  $i=k+1,k+2,\dots,m$ , repita o procedimento até que o número de valores em sequência, que sejam inferiores ou então superiores a média das médias, seja limitado por 2, ou seja, considerando a média das médias dos últimos valores, é possível cruzar a média em pelo menos dois passos. Neste momento o método atingiu sua estimativa para o comprimento do período de aquecimento.

O método exposto tem uma formulação bastante simples, sem a dependência de escolha de parâmetros pelo analista.

## MODELO EXPERIMENTAL

O modelo experimental proposto prima pela simplicidade trata-se de um sistema com fila única, sendo uma situação com fila M/M/1 e outras duas situações com filas M/G/1. Existem diversos sistemas pertencentes ao cotidiano que se assemelham ao cenário descrito. Um exemplo simples seria a situação em que peças serão usinadas por uma única máquina fresadora.

O caso M/M/1 tem chegadas e atendimentos Markovianos e será aqui denominado caso exponencial (de acordo com a distribuição dos tempos) a taxa de chegada será denotada

por  $\lambda$  e a de atendimento por  $\mu$ . Já os casos M/G/1 possuem uma distribuição genérica para os atendimentos. Para caracterizar essa situação foi utilizada uma distribuição Erlang<sub>k</sub>, com média  $\mu$  igual ao caso exponencial e  $k=2$ , portanto com uma menor taxa de variabilidade, e também uma distribuição Gama com parâmetros  $2\mu$  e  $0,5$ , neste caso com média  $\mu$  igual ao caso exponencial, mas com uma maior taxa de variabilidade.

Foram simuladas situações, em que uma máquina trabalhava durante uma jornada contínua ininterrupta de trabalho. A frequência média de chegadas de unidades no sistema era de quatro chegadas por minuto, ou seja,  $\lambda=1/4$ . Já para os atendimentos o tempo médio de duração do atendimento era de 3 minutos, ou seja,  $\mu=1/3$ . O sistema foi observado durante um ano e também durante seis meses. Foram observadas as médias de tempo de espera das unidades na fila e o tamanho médio da fila.

Será mostrado através dos dois métodos o valor do ponto ideal para se iniciar a estudar a evolução do processo e assim conseguir apoiar a tomada de decisão.

## ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados serão apresentados em três subseções, cada uma delas abordando uma das propostas de modelo experimental. Ao final as avaliações gerais considerando simultaneamente todos os modelos experimentais serão discutidas.

### MODELO EXPERIMENTAL M/M/1

Neste modelo os tempos entre chegadas e tempos de atendimento são ambos exponenciais. Existem resultados analíticos para a obtenção das medidas dos parâmetros em estudo, neste caso tempo médio de espera na fila, aqui denotado por  $q_1$  e tamanho médio da fila, aqui denotado por  $q_2$ . Nos dois casos em estudo o valor analítico dos parâmetros pode ser facilmente obtido na literatura de Processos Estocástico, são dados por  $q_1=9$  e  $q_2=3$ . A Tabela I apresenta os resultados das simulações para 180 dias e 360 dias, são mostrados os valores da estimativa do parâmetro, do comprimento do período de aquecimento  $L$  em dias e o quadrado do vício  $QV$  considerando a estimativa proposta. São utilizados os dois métodos em estudo, o método do Cruzamento Iterado das Médias será denotado por CIM e o método do Controle Estatístico de Processo será denotado por SPC.

**Tabela 1**

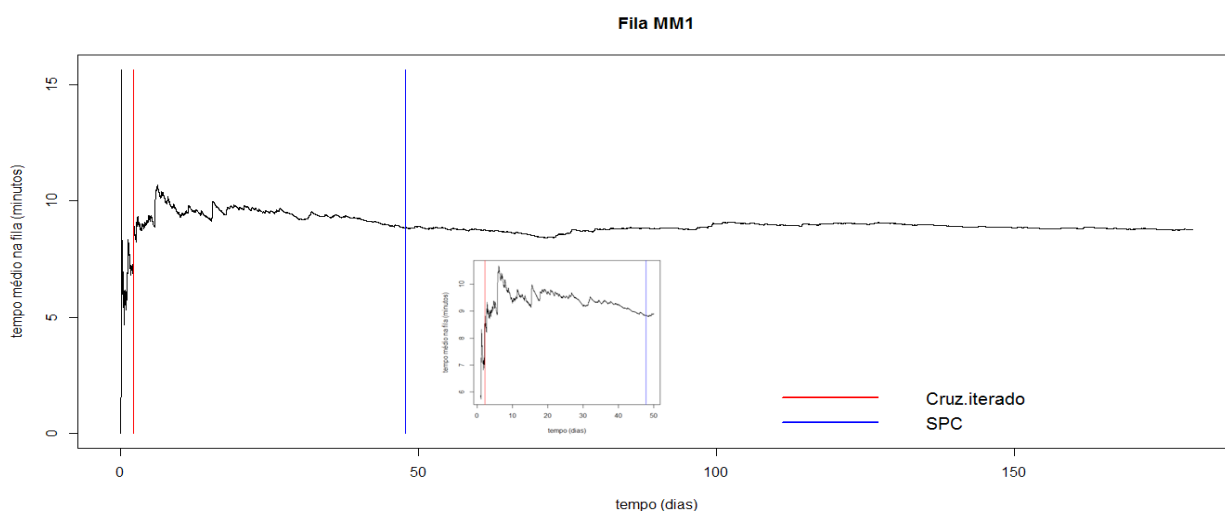
Resultados para filas M/M/1.

Tempo	$\theta$ -CIM	$\theta$ -SPC	L-CIM	L-SPC	QV-CIM	QV-SPC
180 dias	8,962852	8,962582	2,154027	47,845235	0,001380	0,001400
180 dias	2,241317	2,241324	54,560988	55,198145	0,575600	0,575589
360 dias	8,884244	8,884620	2,192570	17,027290	0,013400	0,013313
360 dias	2,219681	2,219685	51,354787	25,682560	0,608898	0,608891

Fonte: Produzida pelos autores.

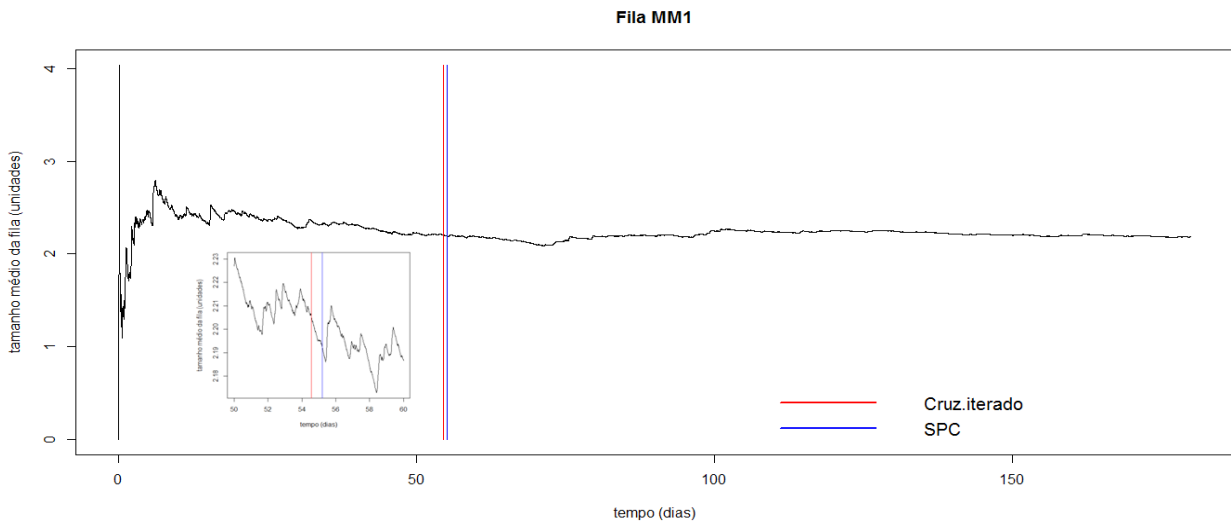


A primeira linha da tabela 1 apresenta resultados para a estimação do tempo médio de permanência na fila para a execução com duração de 180 dias. A segunda linha mostra resultados para a estimação do tamanho médio da fila para a execução de 180 dias. A terceira linha ilustra resultados para a estimação do tempo médio de permanência na fila para a execução com duração de 360 dias. A quarta linha apresenta resultados para a estimação do tamanho médio da fila para a execução de 360 dias. Em todos os casos as estimativas são bastante parecidas, mas em três dos quatro cenários o quadrado do vício da estimativa utilizando o Cruzamento Iterado das Médias foi ligeiramente superior ao obtido através do método SPC. Por outro lado, o método CIM alcançou resultados muito semelhantes ao método SPC através da adoção de períodos mais curtos de aquecimento nos três primeiros cenários. É importante salientar que um método que ofereça bons resultados com um período de aquecimento inferior tende a reduzir o volume necessário de simulações para a reprodução do modelo real. As figuras 1-4 apresentam graficamente cada um dos casos discutidos através da tabela 1.



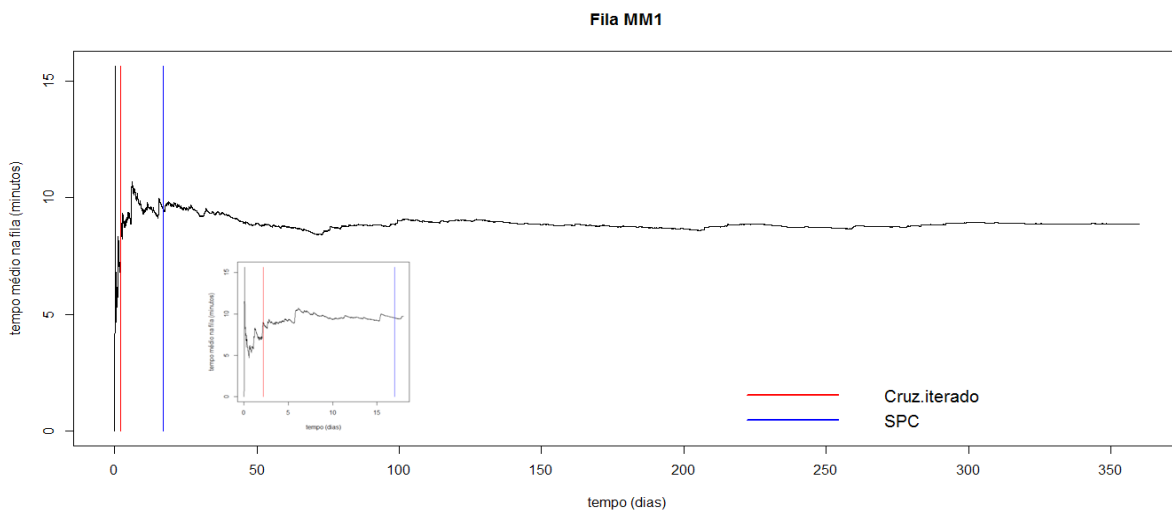
**Figura 1** - Série temporal do tempo médio de permanência na fila para simulação com 180 dias de duração; respectivos comprimentos do período de aquecimento em cada um dos métodos e detalhamento do gráfico na região do corte dos períodos de aquecimento.

Fonte: Produzida pelos autores.



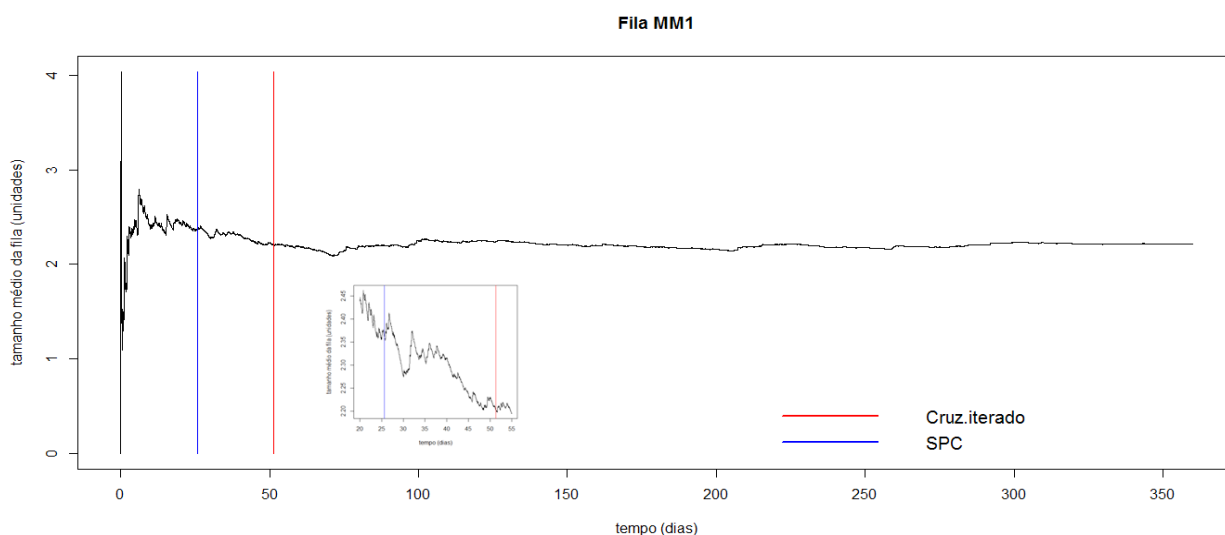
**Figura 2** - Série temporal do tamanho médio da fila para simulação com 180 dias de duração; respectivos comprimentos do período de aquecimento em cada um dos métodos e detalhamento do gráfico na região do corte dos períodos de aquecimento.

Fonte: Produzida pelos autores.



**Figura 3** - Série temporal do tempo médio de permanência na fila para simulação com 360 dias de duração; respectivos comprimentos do período de aquecimento em cada um dos métodos e detalhamento do gráfico na região do corte dos períodos de aquecimento.

Fonte: Produzida pelos autores.



**Figura 4** - Série temporal do tamanho médio da fila para simulação com 360 dias de duração; respectivos comprimentos do período de aquecimento em cada um dos métodos e detalhamento do gráfico na região do corte dos períodos de aquecimento.

Fonte: Produzida pelos autores.

## MODELO EXPERIMENTAL M/G/1 – DISTRIBUIÇÃO ERLANG

Neste modelo os tempos entre chegadas são exponenciais, mas os tempos de atendimento são Erlang preservando o tempo médio de atendimento igual ao caso M/M/1. Não foram utilizados aqui resultados analíticos para a obtenção das medidas dos parâmetros em estudo, neste caso tempo médio de espera na fila, aqui denotado por  $q_1$  e tamanho médio da fila, aqui denotado por  $q_2$ . Nos dois casos em estudo o valor analítico dos parâmetros pode ser obtido na literatura de Processos Estocástico, são dados por  $q_1=6,75$  e  $q_2=1,6875$ . A Tabela II apresenta os resultados das simulações para 180 dias e 360 dias, são mostrados os valores da estimativa do parâmetro, do comprimento do período de aquecimento  $L$  em dias e o quadrado do vício  $QV$  considerando a estimativa proposta em comparação com as medidas obtidas com o descarte da primeira metade da série. São utilizados os dois métodos em estudo, o método do Cruzamento Iterado das Médias será denotado por CIM e o método do Controle Estatístico de Processo será denotado por SPC.

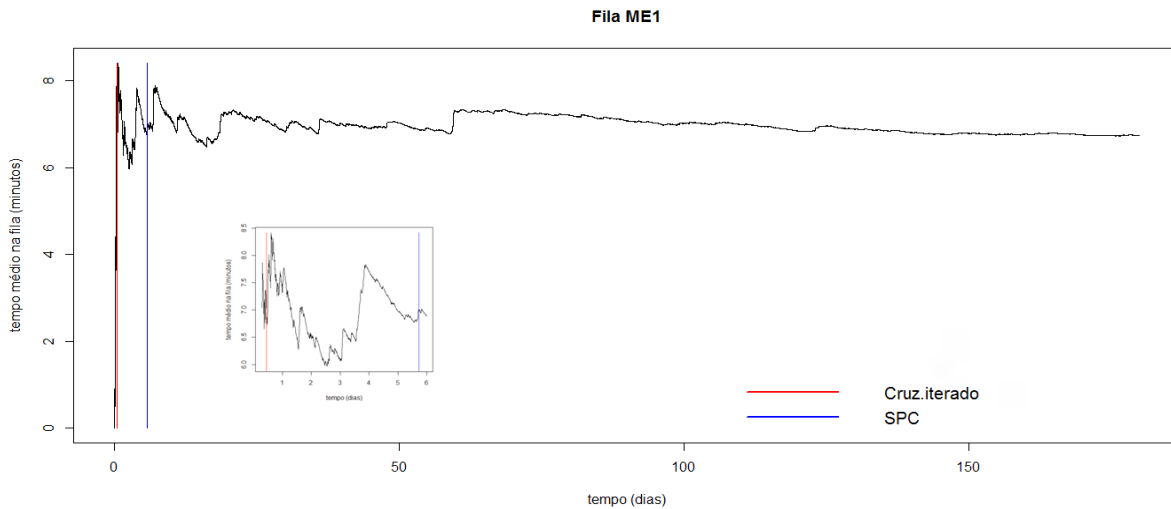
As linhas da Tabela 2 representam os mesmos resultados das linhas da Tabela 1, porém agora discutindo o modelo M/G/1 com distribuição Erlang. Apenas na estimativa do tamanho médio da fila considerando a simulação de 360 dias o método CIM apresentou quadrado do vício igual (considerando seis casas decimais) ao do método SPC. Neste caso o período de aquecimento adotado pelo método CIM foi inferior, em todos os outros cenários, a metodologia CIM forneceu melhores resultados a ainda, através de um período de aquecimento mais curto. As figuras 5-8 apresentam graficamente cada um dos casos discutidos através da **tabela 2**.

**Tabela 2**

Resultados para filas M/G/1 – Distribuição Erlang.

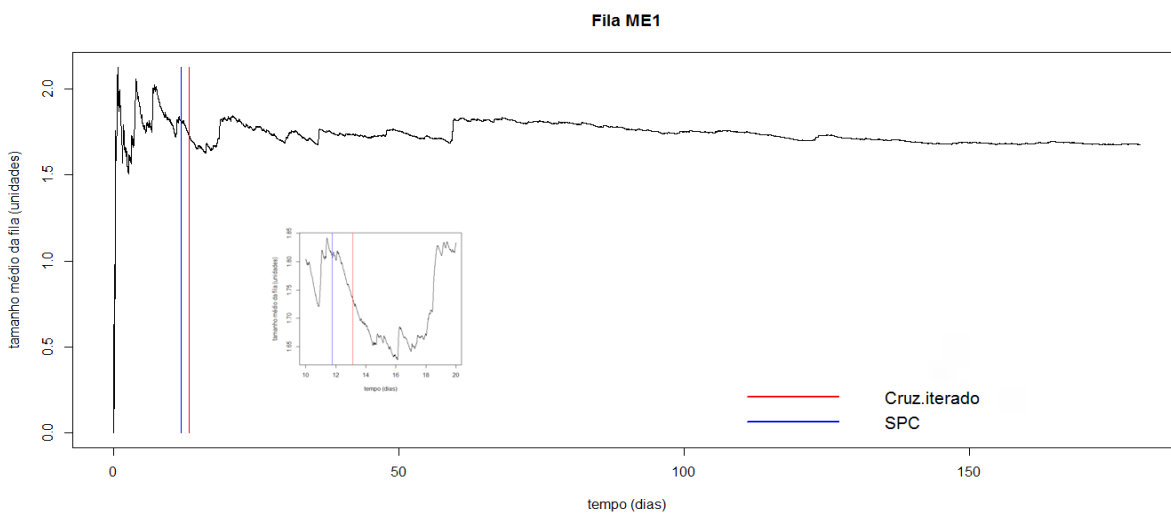
Tempo	$\theta$ -CIM	$\theta$ -SPC	L-CIM	L-SPC	QV-CIM	QV-SPC
180 dias	6,963636	6,964051	0,457459	5,729601	0,045640	0,045818
180 dias	1,739200	1,739168	13,125897	11,764001	0,002673	0,002670
360 dias	6,840180	6,841243	0,405521	29,748730	0,008132	0,008325
360 dias	1,707688	1,707697	28,921121	29,811420	0,000408	0,000408

Fonte: Produzida pelos autores.



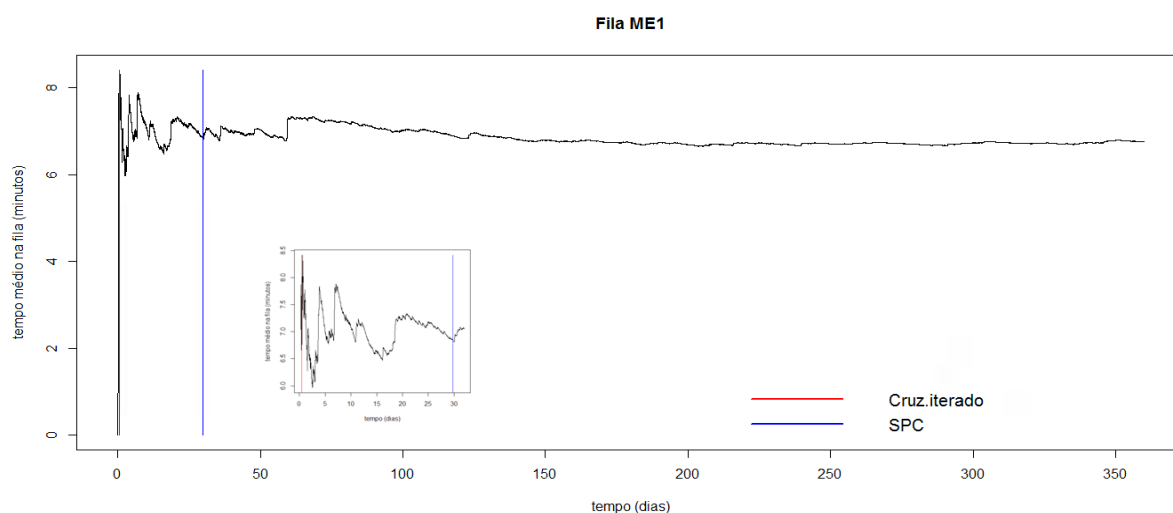
**Figura 5** - Série temporal do tempo médio de permanência na fila para simulação com 180 dias de duração; respectivos comprimentos do período de aquecimento em cada um dos métodos e detalhamento do gráfico na região do corte dos períodos de aquecimento.

Fonte: Produzida pelos autores.

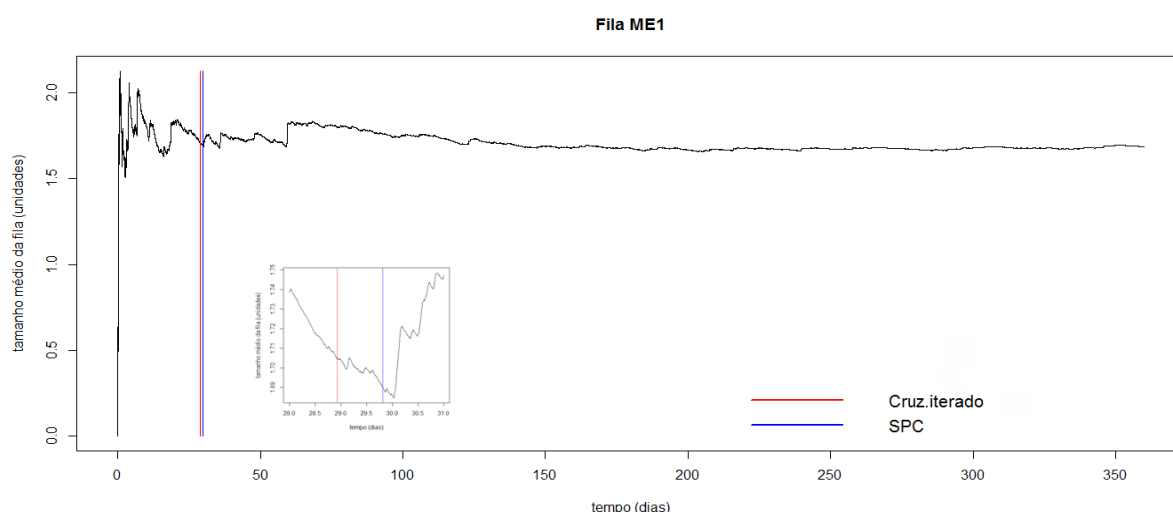


**Figura 6** - Série temporal do tamanho médio da fila para simulação com 180 dias de duração; respectivos comprimentos do período de aquecimento em cada um dos métodos e detalhamento do gráfico na região do corte dos períodos de aquecimento.

Fonte: Produzida pelos autores.



**Figura 7** - Série temporal do tempo médio de permanência na fila para simulação com 360 dias de duração; respectivos comprimentos do período de aquecimento em cada um dos métodos e detalhamento do gráfico na região do corte dos períodos de aquecimento. Fonte: Produzida pelos autores.



**Figura 8** - Série temporal do tamanho médio da fila para simulação com 360 dias de duração; respectivos comprimentos do período de aquecimento em cada um dos métodos e detalhamento do gráfico na região do corte dos períodos de aquecimento. Fonte: Produzida pelos autores.

## MODELO EXPERIMENTAL M/G/1 – DISTRIBUIÇÃO GAMA

Neste modelo os tempos entre chegadas são exponenciais, mas os tempos de atendimento são Gama preservando o tempo médio de atendimento igual ao caso M/M/1. Não foram utilizados aqui resultados analíticos para a obtenção das medidas dos parâmetros em estudo, neste caso tempo médio de espera na fila, aqui denotado por  $q_1$  e tamanho médio da fila, aqui denotado por  $q_2$ . Nos dois casos em estudo o valor analítico dos parâmetros pode ser obtido na literatura de Processos Estocástico, são dados por  $q_1=13,5$  e  $q_2=3,375$ .

A Tabela III apresenta os resultados das simulações para 180 dias e 360 dias, são mostrados os valores da estimativa do parâmetro, do comprimento do período de aquecimento  $L$  em dias e o quadrado do vício  $QV$  considerando a estimativa proposta em comparação com as medidas obtidas com o descarte da primeira metade da série. São utilizados os dois métodos em estudo, o método do Cruzamento Iterado das Médias será denotado por CIM e o método do Controle Estatístico de Processo será denotado por SPC.

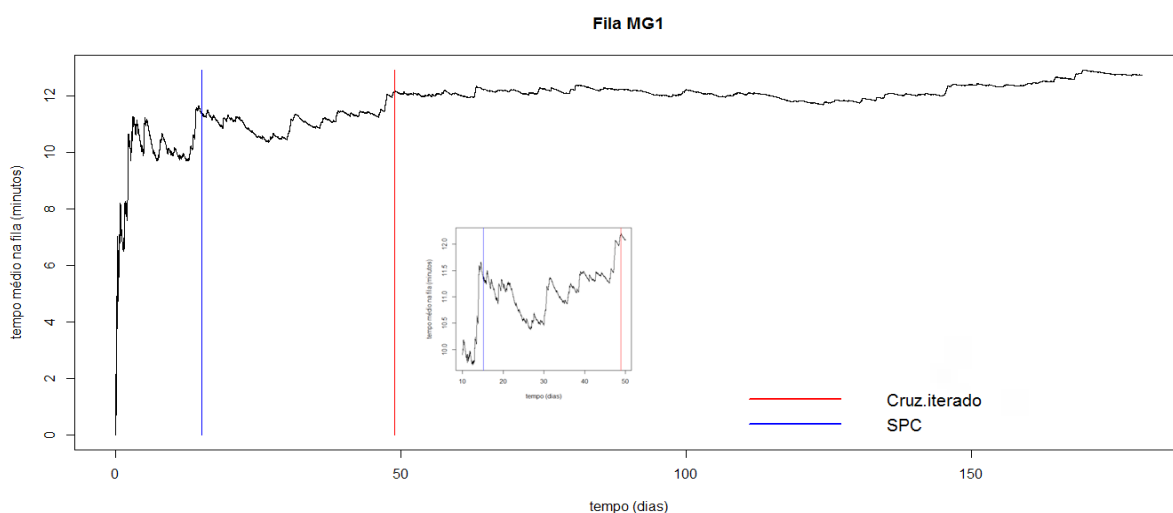
As linhas da tabela 3 representam os mesmos resultados das linhas da Tabela 1, porém agora discutindo o modelo  $M/G/1$  com distribuição Gama. Em todas as situações, o método CIM forneceu valores do quadrado do viés inferiores. Entretanto, ocorreu um custo elevado para a obtenção destes resultados, em todos os casos o método CIM utilizou períodos de aquecimento mais longos que o método SPC. É fácil observar que o aumento na variabilidade dos tempos de atendimento acarretou uma perda de qualidade nos dois métodos, mas o método CIM utiliza períodos mais longos e acaba por fornecer uma ligeira melhoria nas estimativas. As figuras 9-12 apresentam graficamente cada um dos casos discutidos através da tabela 3.

### Tabela 3

Resultados para filas  $M/G/1$  – Distribuição Gama

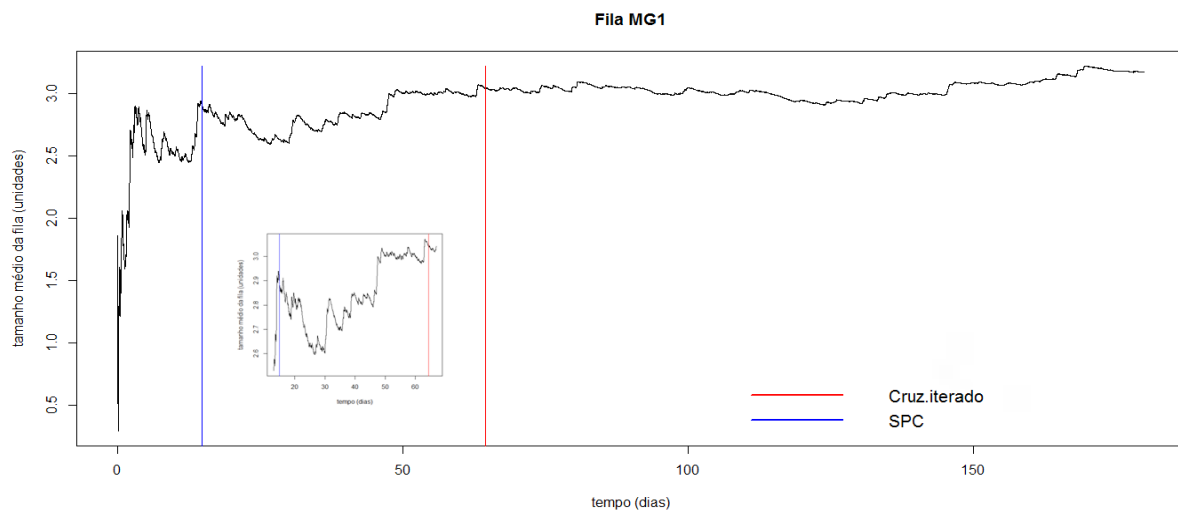
Tempo	$\theta$ -CIM	$\theta$ -SPC	L-CIM	L-SPC	QV-CIM	QV-SPC
180 dias	11,814462	11,810374	48,879053	15,123550	2,841038	2,854836
180 dias	2,945021	2,943602	64,487643	14,784681	0,184882	0,186104
360 dias	12,303268	12,295596	174,866229	27,633220	1,432167	1,450589
360 dias	3,067316	3,065248	181,585200	25,723420	0,094669	0,095946

Fonte: Produzida pelos autores.



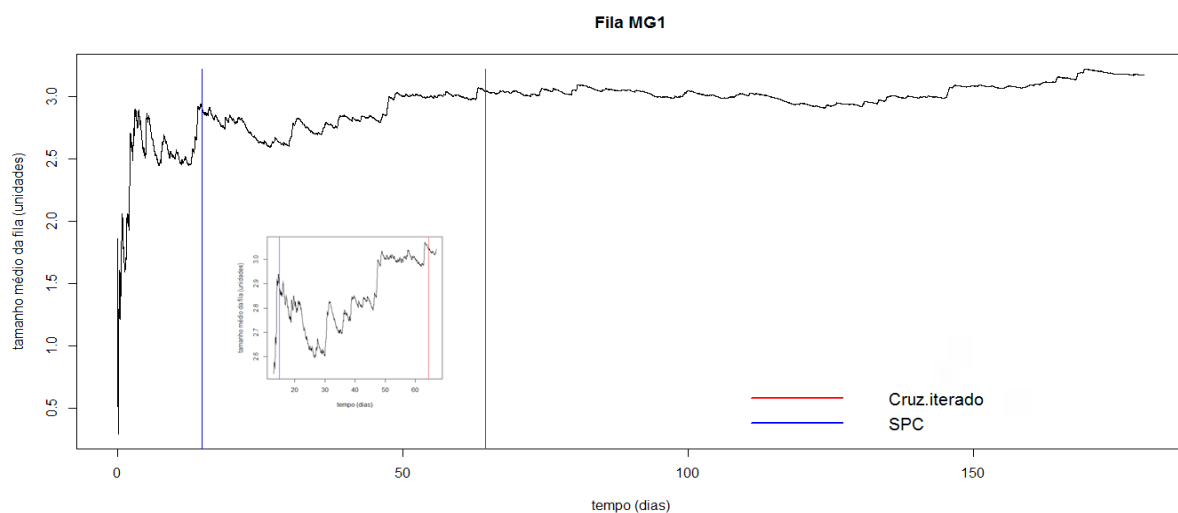
**Figura 9** - Série temporal do tempo médio de permanência na fila para simulação com 180 dias de duração; respectivos comprimentos do período de aquecimento em cada um dos métodos e detalhamento do gráfico na região do corte dos períodos de aquecimento.

Fonte: Produzida pelos autores.



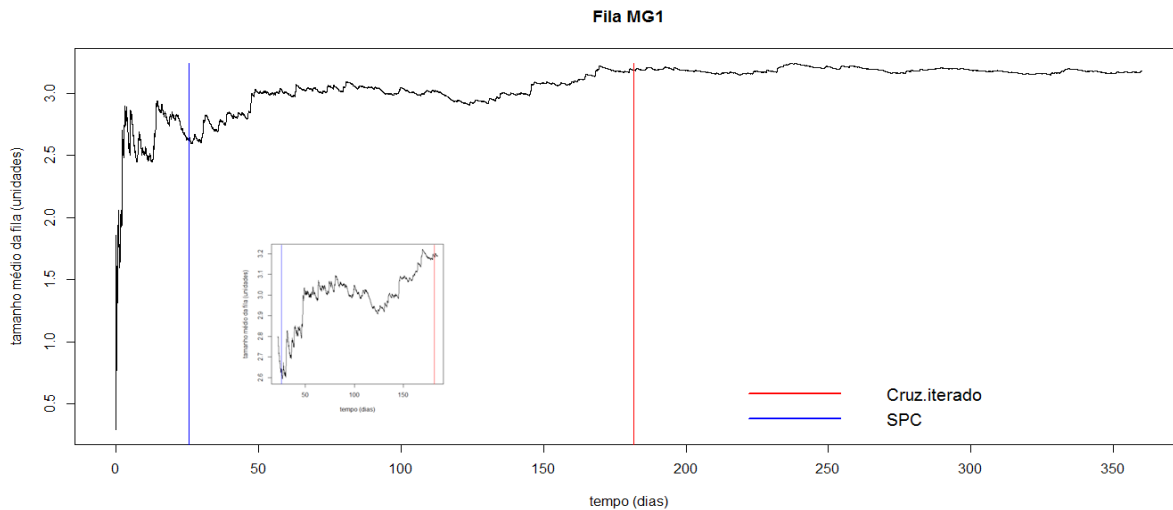
**Figura 10** - Série temporal do tamanho médio da fila para simulação com 180 dias de duração; respectivos comprimentos do período de aquecimento em cada um dos métodos e detalhamento do gráfico na região do corte dos períodos de aquecimento.

Fonte: Produzida pelos autores.



**Figura 11** - Série temporal do tempo médio de permanência na fila para simulação com 360 dias de duração; respectivos comprimentos do período de aquecimento em cada um dos métodos e detalhamento do gráfico na região do corte dos períodos de aquecimento.

Fonte: Produzida pelos autores.



**Figura 12** - Série temporal do tamanho médio da fila para simulação com 360 dias de duração; respectivos comprimentos do período de aquecimento em cada um dos métodos e detalhamento do gráfico na região do corte dos períodos de aquecimento.

Fonte: Produzida pelos autores.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi apresentada uma discussão sobre os estudos associados aos métodos de detecção de períodos de aquecimento. Em particular, dois métodos foram abordados com maior profundidade, o método do Cruzamento Iterado das Médias e o método SPC baseado no Controle Estatístico de Processo. Foram construídos modelos de simulação para testar em diversas situações os dois modelos e métricas comparativas (o quadrado do viés e o comprimento do período de aquecimento adotado) foram propostas a fim de comparar e discutir a utilização e as funcionalidades de cada um dos métodos. O método do Cruzamento Iterado das Médias se mostrou bastante eficiente, trata-se de uma metodologia simples, de fácil implementação e fácil entendimento. A técnica é capaz de produzir resultados eficientes e sua utilização demanda tempos computacionais bastante reduzidos. Já a metodologia SPC utiliza-se da clássica e bastante difundida teoria de Controle Estatístico de Processo. Apesar de alguns resultados inferiores ao método do Cruzamento Iterado das Médias, ainda assim, oferece resultados bastante adequados. Em particular nos cenários de alta variabilidade nos tempos de atendimento a técnica SPC se mostrou mais eficiente. Os resultados deixam o usuário com duas importantes ferramentas para detecção de períodos de aquecimento, mas vale ressaltar uma importante vantagem da metodologia do Cruzamento Iterado das Médias, trata-se de uma técnica completamente não paramétrica, não são necessários testes para suposição de normalidade e verificação de efeitos de correlação como ocorre na metodologia SPC. Desta forma, para alguns problemas específicos, a metodologia CIM pode ser mais recomendável que a metodologia SPC.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Banks, J., Carson, J.S., & Nelson B.L. (1996) *Discrete-Event System Simulation*. 2ª edição. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.
- Bissell, D. (1994) *Statistical Methods for SPC and TQM*. London: Chapman & Hall.
- Cruz, F. R. B.; Duarte, A. R.; Van Woensel, T. (2008) Buffer allocation in general single server queueing network. *Computer and Operations Research*, 35(11), 3581-3598.
- Fishman, G.S. (1973) *Concepts and Methods in Discrete Event Digital Simulation*. New York: Wiley.
- Gafarain, A.V., Ancker, C.J., & Morisaku, T. (1978) Evaluation of commonly used rules for detecting steady-state in computer simulation. *Naval Research Logistics Quarterly*, 25, 511-529.
- Goldsman, D., Schruben, L.W., & Swain, J.J. (1994) Tests for transient means in simulation time series. *Naval Research Logistics Quarterly*, 41, 171-187.
- Jackway, P.T., & Desilva, B.S. (1992) A methodology for initialization bias reduction in computer simulation output. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 9, 87-100.
- Kelton W.D., & Law, A.M. (1983) A new approach for dealing with the startup problem in discrete event simulation. *Naval Research Logistics Quarterly*, 30, 641-658.
- Kendall, D. G., (1953) Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of imbedded markov chains. *Annals Mathematical Statistics*, 24, 338-354.
- Nelson, B. L. (2004) Statistical analysis of simulation results. In Salvendy, G. (org.). *Handbook of Industrial Engineering*, New York: John Wiley and Sons.
- Norato, H. M. G., & Duarte, A. R. (2011) Uma Proposta para a Detecção do Adequado Período de Aquecimento em Modelos de Simulação. *GEPROS – Gestão da Produção, Operações e Sistemas*, 6(4), 11-26.
- Pawlikowski, K. (1990) Steady-state simulation of queuing processes: a survey of problems and solutions. *Computing Surveys*, 22, 123-170.
- Robinson, S. (1994) *Successful simulation: a practical approach to simulation projects*. Maidenhead, UK: McGraw-Hill.
- Robinson, S. (2002) A statistical process control approach for estimating the warmup period. In Yücesan, E.; Chen, C. H.; Snowdon, J. L.; Charnes, J. M. (org.). *Proceedings of the 2002 Winter Simulation Conference*, San Diego - CA: Computer Society, 439– 446.

Schruben, L.W. (1982) Detecting initialization bias in simulation output. *Operations Research*, 30, 569-590.

Vassilacopoulos, G. (1989) Testing for initialization bias in simulation output. *Simulation*, 52 (4), 151-153.

White, K.P. (1997) An effective truncation heuristic for bias reduction in simulation output. *Simulation*, 69 (6), 323-334.

Yücesan, E. (1993) Randomisation tests for initialization bias in simulation output. *Naval Research Logistics Quarterly*, 40, 643-663.

**Recebido em: 12/11/2014**

**Aceito para publicação em: 02/09/2015**