APLICAÇÃO UMA REDE DE BETHE EM UM PROCESSO DE PERCOLAÇÃO NO JOGO DE "PACIÊNCIA" ("SOLITÁRIO")

Euro de Barros Couto Junior[1]

RESUMO
Este texto trata do Jogo de Paciência, visto sob a óptica da Teoria da Percolação. Cada jogada equivale-se a uma camada da Rede de Bethe; uma jogada realiza-se com probabilidade "p". Tendo-se fixadas algumas regras simples de como jogar, encontrou-se, depois de 354 jogos realizados, um percentual mediano de ganho de 53,38983% (p^k), ou seja, de 189 partidas vencidas por este autor, sendo "k" a quantidade mediana de jogadas por jogo. Assim sendo, na Rede de Bethe, a probabilidade de fazer uma única jogada foi estimada em p = 99,46959%, dado que, a quantidade mediana de jogadas de um jogo, neste experimento, foi k = 118 jogadas.
PALAVRAS-CHAVE: Rede de Bethe; Percolação; Probabilidade; Jogo de Paciência.

ABSTRACT
This paper deals with the Solitaire Game, seen from the perspective of the theory of Percolation. Each play corresponds to a layer of Bethe network; a play is performed with probability "p". Having established some simple rules of how to play, it was found after 354 games played, a median percentage of gain of 53.38983% (p^k), i. e. 189 matches won by this author. Thus, in the Bethe network, the probability of making a single pass was estimated at p = 99.469591%, since, on average, a game was played in this experiment with k = 118 passes.
KEYWORDS: Bethe's network; Percolation; Probability; Solitaire Game.

RESÚMEN
Este texto se refiere a el Juego de Solitario, su la perspectiva de la teoría de la percolación. Cada jugada corresponde a una capa de red de Bethe; una jugada se realiza con probabilidad "p". Después de haber establecido algunas reglas simples de cómo jugar, se encontró después de 354 partidos jugados, una ganancia mediana de 53,38983% (p^k), es decir, 189 partidos ganados por este autor. Por lo tanto, en la red de Bethe, la probabilidad de hacer una sola jugada se estimó en p = 99,469591%, ya que, la mediana de jugadas de un juego en esto experimento fué k = 118 jugadas.
PALABRAS CLAVES: red de Bethe; percolación; probabilidad; juego de solitario.

INTRODUÇÃO

Jogar é uma arte... mas, também, é uma ciência... e talvez, por isso, todos nós sejamos sempre ganhadores (Arbiser, 2015): se se pensa, apenas, no jogo, em si, pode-se ganhar ou perder; mas, no fim das contas, somos, sempre, vencedores, porque estudamos e passamos a entender melhor o "jogo da vida".

1 Faculdades Metropolitanas Unidas (FMU), Brasil. Doutor em Ciências pela Faculdade de Medicina da USP; Doutor em Cultura e Literatura Russas pela Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da USP; mestre em Cultura e Literatura Russas pela Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da USP. **ORCID:** http://orcid.org/0000-0001-5254-5780 **E-mail:** estatisticoeuro@gmail.com

PERCOLAÇÃO

A Percolação, que usa conceitos do Cálculo de Probabilidades e da Matemática, foi fruto de um problema simples e comum — a coagem do café, para o qual os ingleses Broadbent e Hammersley publicaram seu famoso artigo, em 1957 (Broadbent & Hammersley, 1957).

A Teoria da Percolação é uma fonte de problemas fascinantes do melhor tipo para os quais um matemático poderia esperar: problemas que são fáceis de estabelecer com um mínimo de preparação, mas cujas soluções são, aparentemente, difíceis e que requerem novos métodos (Efros, 1982). Ao mesmo tempo, vários problemas são de interesse ou são propostos por cientistas de diversas áreas, e não foram propostos, meramente, para demonstrar alguma ingenuidade, ou, contrariamente, por arrogância.

Muito progresso foi feito desde a segunda metade década de 1950, e muitos dos problemas abertos das últimas décadas já foram resolvidos. Com tais soluções, viu-se a evolução de novas técnicas e questões, e o consequente conhecimento mudou o campo de atuação da Percolação (Havlin, 2012). A matemática da Percolação está, agora, razoavelmente madura, apesar de existirem tantas outras importantes questões que ainda restam para serem respondidas. A Tecnologia da Percolação emergiu como um pilar da "Teoria de Sistemas Físicos Desordenados" (Efros, 1982; Berkowitz & Ewing, 1998), e os métodos atuais têm sido aplicados e expandidos em uma variedade de situações de real interesse (Grimmett, 1999; Steif, 2012).

A quantidade de literatura relativa à Percolação parece crescer momento a momento, principalmente em revistas de Física. Tornou-se difícil conseguir saber o assunto a partir do zero, e um dos principais propósitos deste trabalho é abordar uma das possibilidades de aplicação da Percolação, que conseguiu atingir uma reputação, por ser difícil tanto quanto importante. Apesar disso, pode ser interessante observar que o nível de conhecimento matemático requerido para ler um trabalho como este é limitado a uns poucos itens da Teoria da Probabilidade e de Análise Real, em um patamar pré-acadêmico (Grimmett, 1999).

REDE DE BETHE

É comum que se queiram resolver problemas complexos por meio de modelagens simples, em termos matemáticos, fazendo generalizações. A Rede de Bethe, proposta pelo físico alemão Hans Albrecht Bethe, é também conhecida como "Percolação em Árvore" (Kesten, 2006).

Em cada camada da estrutura de árvore, temos "α^i" galhos, onde "α" é a quantidade de galhos distintos da primeira camada, e "i" é a quantidade de galhos total em uma camada, com $i = 0, 1, 2, ..., k$, onde "k" é a quantidade de camadas, quando a rede é finita. Este estudo considera, apenas, redes finitas; portanto, $k < \infty$ (Stanley et al., 1999).

Neste caso, a pergunta que deseja-se responder é: “há um caminho de pontos conectados, de comprimento finito, “através” da rede, que permita chegar ao final da rede?” — neste caso, chegar ao final da rede deve ser entendido como o final do jogo. Considere-se, então, uma sequência de cartas chamada de “caminho”. Percorrer todo o caminho significa ter conseguido chegar ao final do jogo.

Em um modelo matemático para a obtenção de um grafo aleatório (conjunto de caminhos), um local está “ocupado” (não permite passagem, ou o caminho está obstruído), com probabilidade “1-p”, ou “desocupado” (permite a passagem, ou o caminho está livre), com probabilidade “p”. Uma vez que esta probabilidade é uma função crescente de “p”, deve haver um “p” crítico (designado por “p_c”), abaixo do qual a probabilidade é sempre “0” e acima do qual a probabilidade é maior do que “0”, e varia até chegar a “1”. Mesmo para “k” tão pequeno quanto se queira, a probabilidade de um caminho aberto, a partir do início do processo, aumenta, desde quase “0”, até quase “1”, em poucos passos, independentemente do valor “p” (Kesten, 1982).

Um caso limite para estruturas (grafos ou reticulados) em muitas dimensões é dado pela Rede de Bethe, cujo limiar é de $p_c = 1 / (\alpha - 1)$, para uma quantidade de galhos ou caminhos “α” (Camia & Newman, 2005).

O JOGADOR

Entre as pessoas que jogam, quase todas são amadoras: menos de 1% dos jogadores de jogos de cartas, atualmente, é formado por profissionais: a quase totalidade (mais de 99%) são amadores, que jogam por diversão e/ou passatempo. É o caso deste autor, e quase certamente, dos leitores. Assim, a experiência dos amadores aproxima-se a um “estado cego”, ou seja, sem o viés que um jogador profissional poderia criar. E a intenção é essa: a de que se saiba qual é a probabilidade de ganho, em um jogo de cartas — neste caso, o “Jogo de Paciência” (também conhecido como “Solitário”).

O “JOGO DE PACIÊNCIA”

A “Paciência” (ou “Solitário”) é um jogo de cartas de baralho, jogado por um único jogador. Há diversas variantes na forma de se jogar, em relação às suas regras básicas, que variam de país para país, e de época em época, mas, essencialmente, esse jogo, hoje, está disponível em bilhões de computadores, *tablets*, celulares, e outros dispositivos eletrônicos semelhantes, além do próprio baralho de 52 cartas (os coringas são deixados de lado, e as cartas vão de “Ás” até “Rei”, nessa ordem, nos quatro naipes tradicionais).

A quantidade de permutações das 52 cartas é 52! (52 fatorial), o que permite produzir, então, “52!” jogos distintos: esse número equivale-se a pouco mais de 8×10^{67} permutações. Portanto, tendo-se embaralhado as cartas, ou, solicitado ao dispositivo eletrônico, para que distribua as cartas, será quase impossível que uma mesma distribuição de cartas seja observada em pouco tempo. A versão para dispositivos eletrônicos desse jogo é, por vezes, conhecida como “Klondike” (pron.: klóndaike).

O jogo é preparado, distribuindo-se as 52 cartas do seguinte modo (Fig. 1), em uma área de jogo:

a) 28 cartas são dispostas em sete colunas, sendo que a primeira coluna contém 1 carta; a segunda coluna contém 2 cartas, e assim por diante, até que, na sétima coluna, sejam colocadas 7 cartas; a carta superior é mostrada ao jogador, e as demais ficam voltadas para baixo;
b) as 24 cartas restantes (52 - 28 = 24) são colocadas em um monte; essas cartas também ficam voltadas para baixo;
c) 4 lugares para a formação das chamadas pilhas-base são reservados à direita da área de jogo.

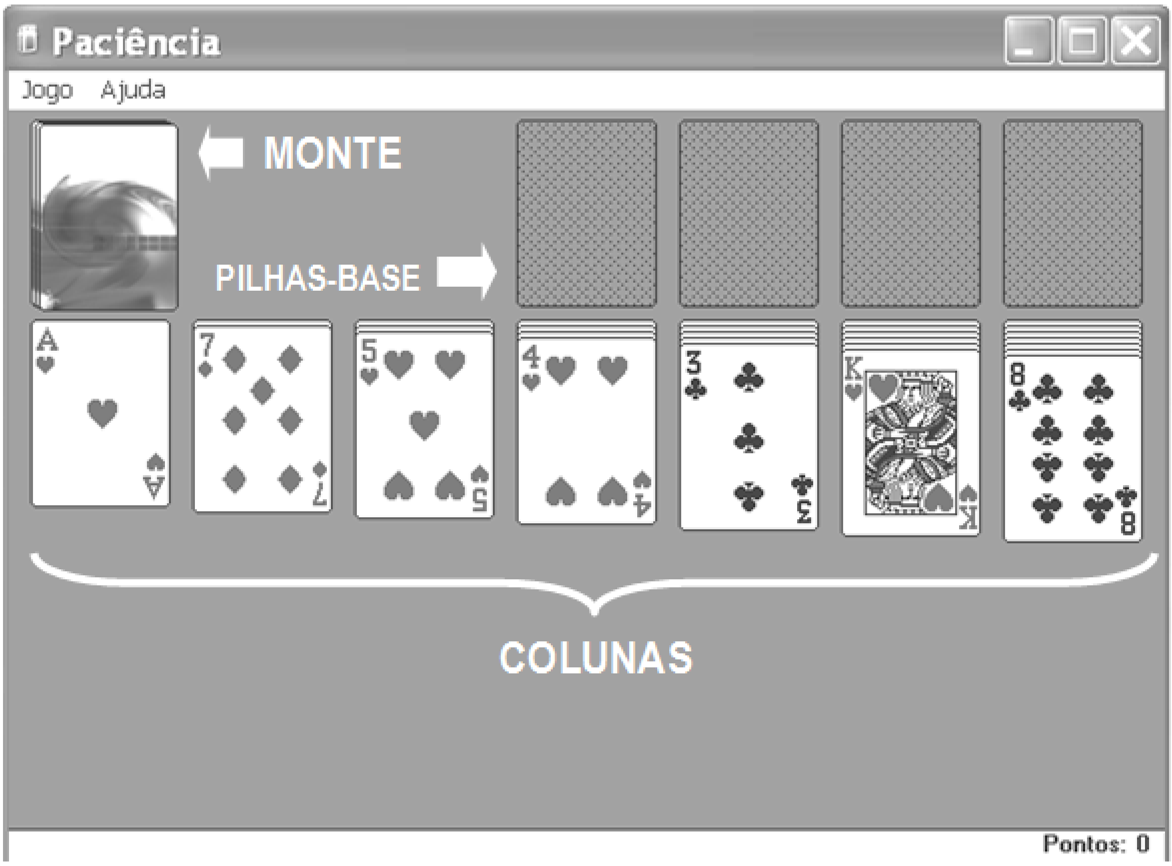

Figura 1. Área do jogo de Paciência (adaptada pelo autor).
Fonte: adaptado de MS-Windows XP.

Podem-se resumir as sequências das jogadas do Jogo de Paciência, pelo que se mostra no fluxograma da Fig. 2:

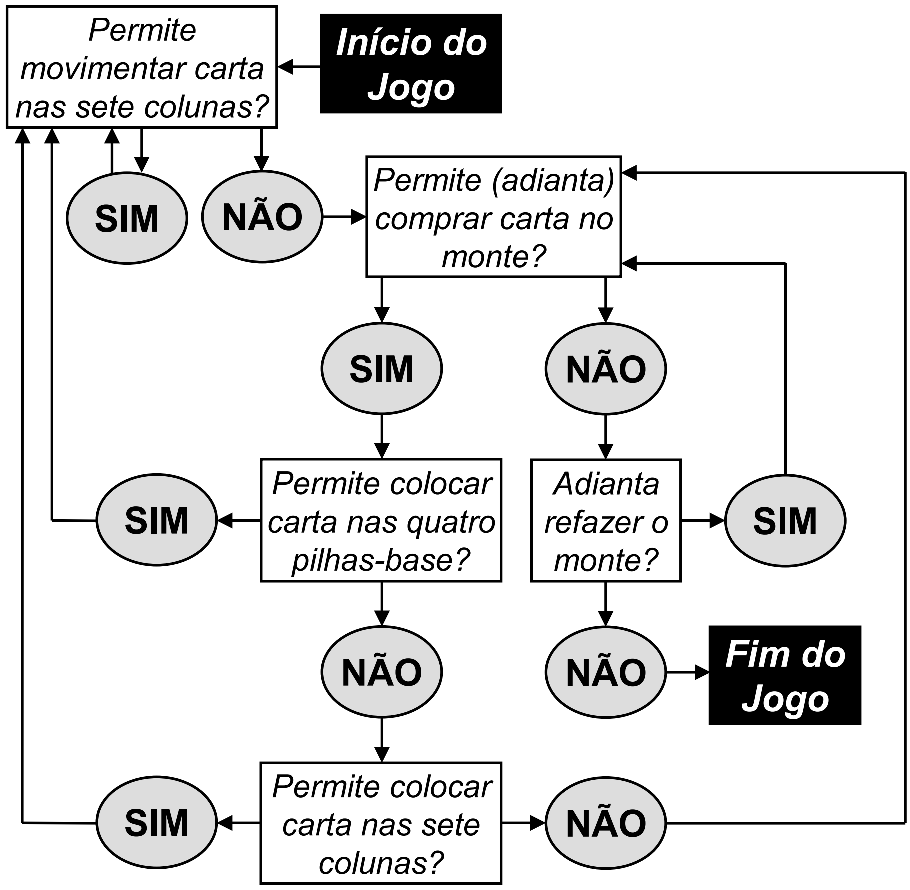

Figura 2. Esquema simplificado da sequência de jogadas no Jogo de Paciência.
Fonte: elaborada pelo autor.

O JOGO E AS PROBABILIDADES DAS JOGADAS

Seja a probabilidade de fazer a jogada indicada por "p"; logo, a probabilidade de não fazer a jogada vale "1-p". Podemos indicar, matematicamente, essa situação, assim:

$$P(\text{"jogar"}) = p$$
$$P(\text{"não jogar"}) = 1 - p$$

Com isso, queremos dizer que a ocorrência de uma jogada tem probabilidade "p" de acontecer, e a não ocorrência de uma jogada tem probabilidade "1-p" de acontecer (Knill, 2009).

Em Percolação, a probabilidade de chegarmos ao final do jogo, como vencedores, em "k" jogadas, será "p^k", e portanto, a probabilidade de chegarmos ao final do jogo, como perdedores, também em "k" jogadas, será "$1-p^k$". Cada jogada estará associada à possibilidade de realizar a jogada ou de não realizá-la, ou seja, se houver possibilidade de jogar, a jogada será efetivamente feita, e se não houver possibilidade de jogar, nenhuma jogada será feita.

MÉTODOS E PROCEDIMENTOS

O objetivo deste artigo é o de mostrar uma aplicação da Rede de Bethe, usando o "Jogo de Paciência", com a intenção de demonstrar que o jogo pode ser modelado por essa rede.

Para tanto, consultou-se a literatura dos assuntos abordados e dos assuntos correlatos, e foram feitas simulações por meio de 354 jogos de Paciência, anotando-se as características de cada jogo: adotaram-se algumas operações e regras universais para a movimentação das cartas, sempre obedecendo às regras do "Jogo de Paciência", além de contadas as quantidades de jogadas, do início até o final, e de pontos acumulados; e ainda, com base na quantidade de jogos vencidos, calcularam-se as probabilidades de vitória e a derrota — cada jogo, ao final, foi marcado como vitória ou derrota.

OPERAÇÕES ADOTADAS PARA O JOGO DE PACIÊNCIA

As seguintes operações foram estabelecidas, para determinar-se o "modo" de jogar:

a) toda jogada tem como objetivo o "avanço do jogo", o que significa cumprir com todos os movimentos de cartas necessários para empilhar todas as cartas nas quatro pilhas-base;

b) quando houver uma carta que serve para alterar uma das sete colunas, essa carta será usada para essa alteração; essa carta pode estar no monte, ou em uma das sete colunas, ou em uma das quatro pilhas-base;

c) houver uma carta que possa ser movimentada para uma das quatro pilhas-base, essa carta será colocada na pilha-base, a não ser que sirva para uma jogada em que outra carta (ou outras cartas) deem condições para avanço do jogo;

d) quando houver uma carta que encontra-se em uma das quatro pilhas-base, que sirva para dar continuidade ao jogo, ela será usada, em uma das sete colunas;

e) quando o jogo impossibilitar que novas jogadas sejam feitas, ele será encerrado, e computado como "derrota"; quando todas as cartas estiverem nas quatro pilhas-base, ele também será encerrado, e computado como "vitória";

f) apesar de ser permitido que o jogo possa ser oferecido novamente, nos mesmos moldes (com a mesma disposição inicial das cartas), adotaremos a regra de não refazer nenhum jogo previamente oferecido; somente jogos ainda não jogados serão aceitos.

REGRAS ADOTADAS PARA O JOGO DE PACIÊNCIA

O objetivo do jogo é o de criar pilhas de cartas do mais baixo ao mais alto valor (sendo a carta do "Ás" a de menor valor e a carta do "Rei" a de maior valor), em cada uma das quatro pilhas-base no canto direito superior. Cada pilha-base pode conter, apenas, um naipe.

Assim, cada uma das quatro pilhas-base deve começar com um “Ás” e terminar com um “Rei” de mesmo naipe.

Existem sete colunas, nas quais pode-se movimentar as cartas de uma coluna para outra. As cartas dessas sete colunas devem ficar em ordem decrescente e sequencial, porém, devem alternar-se entre cartas de naipes pretos e de naipes vermelhos. Por exemplo, pode-se ter um “Sete vermelho” sobre um “Oito preto”.

Pode-se mover sequências de cartas entre as sete colunas. No jogo eletrônico, basta clicar na carta de maior valor que se deseja mover para outra coluna e que deve ter a cor complementar e o valor de uma e exatamente uma unidade a menos do que a carta da coluna para onde essa sequência será movida.

Qualquer uma das sete colunas, quando vazias, pode receber uma das quatro cartas de “Rei”, ou qualquer sequência que tenha o “Rei” na ponta.

Quando não se tem possibilidade de movimentar-se entre as sete colunas, deve-se usar as cartas disponíveis no monte, colocado à esquerda, na parte superior da mesa. Se todas as cartas do monte tiverem sido selecionadas em uma rodada, então pode-se devolver essas cartas ao monte, e novamente, selecionar as cartas do monte, para uma nova rodada.

Finalmente, adotaremos que, somente uma carta por vez será tirada do monte. Existe uma variante do “Jogo de Paciência” que permite tirarem-se três cartas por vez.

Essas regras são necessárias para a unifomização do “modo” de jogar, impedindo variações a um mesmo jogador; elas consistem de regras universais, ou seja, formam um conjunto de regras comuns para muitos jogadores.

CONFIGURAÇÃO DA REDE DE BETHE NO “JOGO DE PACIÊNCIA”

Neste estudo, tem-se uma estrutura de árvore de 6 galhos ($\alpha = 6$), com 6^i galhos, em cada camada, com i = 0, 1, 2, ..., k-1, onde “k” é a quantidade de camadas da rede; “k-2” equivale à quantidade de jogadas de um jogo, já que, k=0 marca a prepração do jogo, até chegar-se à k-ésima camada, que é o marcador do fim do jogo (Fig. 3).

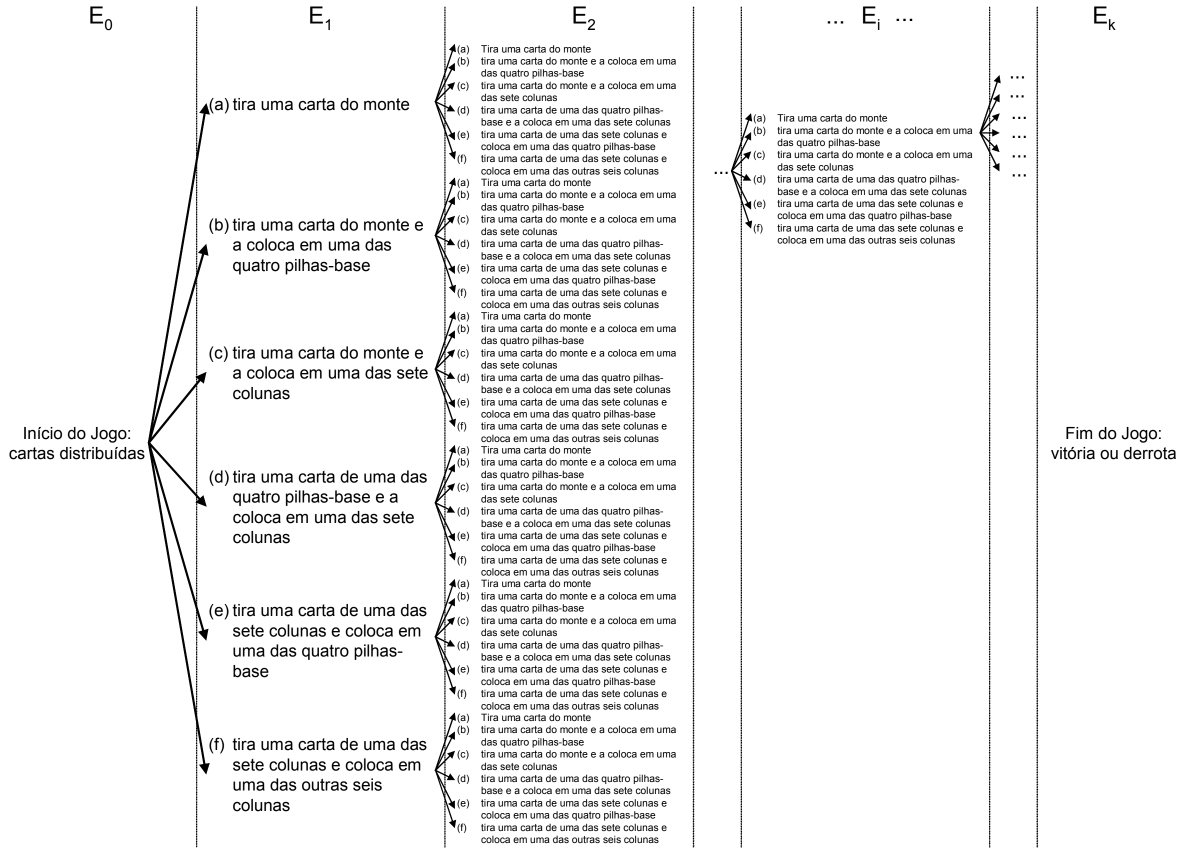

Figura 3. Esquema simplificado da Rede de Bethe adotada para o "Jogo de Paciência".
Fonte: elaborada pelo autor.

A primeira jogada, indicada por "E_1", tem "α" galhos, e cada galho tem outros "α" galhos, e assim por diante, até o "k-ésimo - 1" galho. O estado inicial ("E_0") consiste do início do jogo, ou seja, da distribuição das cartas nas sete colunas, e no monte; o estado final ("E_k") consiste do final do jogo. Cada estado ("E_i"), com $1 < i < k-1$, equivale-se a uma jogada. A probabilidade de mudança de um estado "i" para um estado "i+1" vale "p"; logo, a probabilidade de não-mudança entre dois estados vale "1-p", com $0 \leq p \leq 1$.

Neste estudo, considera-se uma "árvore regular", ou seja, com a quantidade constante de possibilidades de jogadas, entre dois estados consecutivos ("α" constante). Os caminhos possíveis, que são formados pelas sequências possíveis de jogadas chegarão a dois resultados únicos, na camada "E_k": vitória ou derrota. A vitória significa que todas as cartas do monte e das sete colunas foram colocadas nas quatro pilhas-base; a derrota significa que nem todas as cartas puderam ser colocadas nas quatro pilhas-base.

A equivalência entre o Jogo de Paciência e a Rede de Bethe evidencia-se, por conta do que foi apresentado nos parágrafos anteriores. Assim, qualquer probabilidade pode ser calculada com base nos "caminhos livres" (jogada que pode ser feita) e nos "caminhos ocupados" (jogada que não pode ser feita). Cada jogada feita significa que o caminho percorrido estava livre para, ao menos, um dos seis galhos da árvore; e a impossibilidade de realização das seis jogadas possíveis significa que o jogo chegou ao final.

Neste caso, cada camada da Rede de Bethe contém 6 possibilidades de escolha (caminhos ou galhos da árvore), a fim de dar continuidade ao jogo, até seu final. Assim, a probabilidade de “fazer-se uma jogada” vale “p”, ou seja, de passar da camada “i” para a camada “i+1”. Eis as seis possibilidades escolha para uma jogada:

a) tirar uma carta do monte;

b) tirar uma carta do monte e colocá-la em uma das quatro pilhas-base;

c) tirar uma carta do monte e colocá-la em uma das sete colunas;

d) tirar uma carta de uma das quatro pilhas-base e colocá-la em uma das sete colunas;

e) tirar uma carta de uma das sete colunas e colocá-la em uma das quatro pilhas--base; e

f) tirar uma carta de uma das sete colunas e colocá-la em uma das outras seis colunas.

Uma observação importante: podem-se movimentar, concomitantemente, duas ou mais cartas de uma mesma coluna, entre as sete colunas; essa operação é considerada como equivalente a tirar uma carta de uma das sete colunas e colocá-la em uma das outras seis colunas.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Foram jogadas 354 partidas de “Paciência”, em um computador com o sistema operacional MS-Windows 10, sendo que 189 redundaram em vitórias (53,38983%) e 165 derrotas (46,61017%). Com isso tem-se que, nas “k” jogadas de um jogo, pode-se escrever que p^k = 53,38983% = 0,5338983 ≈ 0,534. Pela mediana da quantidade de jogadas de um jogo, “k” vale 118; logo, p = [raiz 118] de 53,38983%, que vale $\sqrt[118]{53,38983\%}$ = 99,46959% = 0,9946959 ≈ 0,995. Assim, pode-se afirmar que a probabilidade de ocorrência de uma jogada vale quase 99,5%; logo, a probabilidade de não-ocorrência de uma jogada vale 1 - 0,9946959 = 0,0053041 ≈ 0,005.

O valor de “p_c” teórico vale 1 / (α - 1) = 1 / (6 - 1), pois são 6 possibilidades de jogadas (caminhos); logo p_c = 1 / 5 = 0,2 = 20%. Ele é o valor mínimo esperado, pois o valor encontrado no experimento vale 53,38983%.

A Tabela 1 mostra os resultados de valores de “p”, considerando p^k ≈ 0,534. Observa-se que os valores de “p” são crescentes, quanto maior o valor de “k”, pois o valor de “p” é calculado pela raiz k-ésima de p^k, ou seja, p^k elevado a (1/k). Reconhece-se, com certa facilidade, que, para valores de “k” pequenos, não se atinge o final do jogo: esses valores foram calculados como valores teóricos, pois a quantidade mínima de jogadas, entre as 354 partidas realizadas, foi 67; logo, não haveria motivação para calcularem-se probabilidades para valores baixos de “k”, como, por exemplo, 1, 2 ou 3, visto que nenhuma partida chega a seu final com essas quantidades de jogadas. A quantidade máxima de jogadas em uma partida foi 159. Assim, calculando-se os valores de "p" para o intervalo [67; 159], obtivemos que 0,990 < p < 0,997.

Tabela 1

Valores das probabilidades de cada jogada ("p"), considerando $p^k \approx 0{,}534$.

k	p^k	p	k	p^k	p	k	p^k	p
50	0,534	0,987531	75	0,534	0,991668	100	0,534	0,993744
51	0,534	0,987770	76	0,534	0,991777	101	0,534	0,993806
52	0,534	0,988004	77	0,534	0,991883	102	0,534	0,993866
53	0,534	0,988229	78	0,534	0,991987	103	0,534	0,993926
54	0,534	0,988446	79	0,534	0,992088	104	0,534	0,993984
55	0,534	0,988655	80	0,534	0,992186	105	0,534	0,994041
56	0,534	0,988856	81	0,534	0,992282	106	0,534	0,994097
57	0,534	0,989051	82	0,534	0,992376	107	0,534	0,994152
58	0,534	0,989238	83	0,534	0,992468	108	0,534	0,994206
59	0,534	0,989420	84	0,534	0,992557	109	0,534	0,994259
60	0,534	0,989595	85	0,534	0,992644	110	0,534	0,994311
61	0,534	0,989765	86	0,534	0,992729	111	0,534	0,994362
62	0,534	0,989929	87	0,534	0,992813	112	0,534	0,994413
63	0,534	0,990088	88	0,534	0,992894	113	0,534	0,994462
64	0,534	0,990242	89	0,534	0,992974	114	0,534	0,994510
65	0,534	0,990392	90	0,534	0,993051	115	0,534	0,994558
66	0,534	0,990537	91	0,534	0,993128	116	0,534	0,994605
67	0,534	0,990677	92	0,534	0,993202	117	0,534	0,994651
68	0,534	0,990814	93	0,534	0,993275	118	0,534	0,994696
69	0,534	0,990946	94	0,534	0,993346	119	0,534	0,994740
70	0,534	0,991075	95	0,534	0,993416	120	0,534	0,994784
71	0,534	0,991200	96	0,534	0,993484	121	0,534	0,994827
72	0,534	0,991322	97	0,534	0,993551	122	0,534	0,994869
73	0,534	0,991440	98	0,534	0,993617	123	0,534	0,994911
74	0,534	0,991555	99	0,534	0,993681	124	0,534	0,994952
125	0,534	0,994992	150	0,534	0,995825	175	0,534	0,996420
126	0,534	0,995032	151	0,534	0,995853	176	0,534	0,996441
127	0,534	0,995071	152	0,534	0,995880	177	0,534	0,996461
128	0,534	0,995109	153	0,534	0,995907	178	0,534	0,996481
129	0,534	0,995147	154	0,534	0,995933	179	0,534	0,996500
130	0,534	0,995184	155	0,534	0,995959	180	0,534	0,996520

k	p^k	p	k	p^k	p	k	p^k	p
131	0,534	0,995221	156	0,534	0,995985	181	0,534	0,996539
132	0,534	0,995257	157	0,534	0,996011	182	0,534	0,996558
133	0,534	0,995293	158	0,534	0,996036	183	0,534	0,996577
134	0,534	0,995328	159	0,534	0,996061	184	0,534	0,996595
135	0,534	0,995362	160	0,534	0,996085	185	0,534	0,996614
136	0,534	0,995396	161	0,534	0,996110	186	0,534	0,996632
137	0,534	0,995430	162	0,534	0,996134	187	0,534	0,996650
138	0,534	0,995463	163	0,534	0,996157	188	0,534	0,996668
139	0,534	0,995495	164	0,534	0,996181	189	0,534	0,996685
140	0,534	0,995528	165	0,534	0,996204	190	0,534	0,996703
141	0,534	0,995559	166	0,534	0,996227	191	0,534	0,996720
142	0,534	0,995590	167	0,534	0,996249	192	0,534	0,996737
143	0,534	0,995621	168	0,534	0,996272	193	0,534	0,996754
144	0,534	0,995651	169	0,534	0,996294	194	0,534	0,996770
145	0,534	0,995681	170	0,534	0,996315	195	0,534	0,996787
146	0,534	0,995711	171	0,534	0,996337	196	0,534	0,996803
147	0,534	0,995740	172	0,534	0,996358	197	0,534	0,996820
148	0,534	0,995769	173	0,534	0,996379	198	0,534	0,996836
149	0,534	0,995797	174	0,534	0,996400	199	0,534	0,996851

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Teoria da Percolação apresenta-se como simplificadora de situações cujos modelos seriam bastante complexos, caso não houvesse a possibilidade de entendimento por meio do uso de “caminhos” e/ou “galhos” (Kesten, 2006).

Pôde-se, com o experimento proposto (“Jogo de Paciência”) demonstrar, imediatamente, uma aplicação interessante com o objetivo simples de determinar-se uma estimativa para chegar a uma vitória nesse jogo, e mais: uma estimativa para obter-se o valor da probabilidade de realização de uma única jogada.

Para tanto, regras universais de jogo foram estabelecidas, e com base nelas, as pouco mais de 350 partidas jogadas permitiram que os valores estimados pudessem ser considerados aceitáveis, para um jogador amador.

O uso do método da Rede de Bethe permitiu estabelecer um esquema simples para a compreensão do “Jogo de Paciência”, agora visto como uma sequência de jogadas, formando um “caminho”, do início ao final do jogo, onde apenas dois resultados (vitória ou derrota), em conjunto, produziram os valores calculados e mostrados neste trabalho.

Com isso, tem-se a esperança de que não somente outros jogos, mas experimentos cujas configurações sejam semelhantes à do "Jogo de Paciência", possam auxiliar no cálculo de probabilidades que permitam explicar, de modo simplificado, fenômenos naturais e/ou artificiais observáveis e passíveis de modelagem — alguns exemplos: penetração de ar nos pulmões (com alvéolos livres e obstruídos); espalhamento do fogo em regiões florestais (com plantas acessíveis e não acessíveis ao fogo); estudos de tráfego em regiões adensadas (com vias livres e congestionadas) etc. — sem prévia comprovação, o que poderá ser feito em outros trabalhos.

REFERÊNCIAS

Arbiser, A. (2015). *O jogador científico* — por que perdemos no pôquer, na loteria, na roleta... Campinas: UNICAMP.

Berkowitz, B., & Ewing, R. P. (1998). Percolation theory and network modeling — applications in soil physics. *Surveys in Geophysics*, 23-72.

Broadbent, S. & Hammersley, J. (1957). Percolation processes I. Crystals and mazes, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 53: 629-641.

Camia, F. & Newman, C. M. (2005). The full scaling limit of two-dimensional critical percolation, *arXiv:math.PR* / 0504036.

Efros, A. L. (1982). *Física e Geometria da Desordem*. Biblioteca Quanta, vol. 19, Moscou: Naúka, 1982.

Grimmet, G. (1999). *Percolation.* Berlin: Springer-Verlag.

Havlin, S. (2012). *Percolation: Theory and Applications.*

Kesten, H. (1982). *Percolation Theory for Mathematicians*, Boston: Bikhäuser.

Kesten, H. (2006). *What is... Percolation?* Notices of AMS, May.

Knill, O. (2009). *Probability, Stochastic Processes & Percolation*, India: Overseas Press.

Stanley, H. E.; Andrade Jr., J. S.; Havli, S.; Maksea, H. A.; Sukie, B. (1999). Percolation phenomena: a broad-brush introduction with some recent applications to porous media, liquid water, and city growth. *Physica A* (266):5-16.

Steif, J. E. (2012). *A mini course on percolation theory*, Gothenburg, Sweden.

Recebido em: 19/04/2016
Aceito para publicação em: 21/03/2017